目　录

引　言

对称性是人们在观察自然和认识自然过程中所产生的一种观念．在自然界千变万化的运动演化过程中，显现出了各式各样的对称性．自然界千变万化的运动演化，从一个侧面来说，就体现为显现出各式各样的对称性，同时又通过这些对称性的演化和破缺来反映出运动演化的特点．从一定意义上来说，运动的多样性的一个重要表现是自然界同时显现出多种不同类型的对称性．这些对称性互相交织在一起，在演化过程中不断有对称性发生破缺，同时往往又显现出新的对称性来．因此研究自然现象中显现的各种对称性，研究它们产生和破缺的演化规律，是人们认识自然规律的一个重要方面．

无论什么样的对称现象，都是与把两种不同的情况相比较分不开的．在数学上，将两种情况间通过确定的规则对应起来的关系，称为从一种情况到另一种情况的变换．物理学中对称性的观念可以概括为：如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有该变换所对应的对称性．既然每一种对称性都和某种特定的变换相联系，那么对称性的千差万别也就集中反映在与之相联系的各种变换上．系统地研究各种变换之间普遍联系规律的数学分支是群论．

群论是数学的一个重要分支，它在自然科学和日常生活中都有广泛的应用，给出重要的结果．下面我们举一个生活中有趣的例子：

甲和乙合作用扑克牌变戏法，从一副扑克牌中抽出一张牌藏起来，把剩下的51张牌任意地分成两组分别给甲和乙．甲和乙两人合作起来去猜抽出去的那张牌，但他们分别只能看自己手里的

牌．他们要合作猜出那张牌，就需要乙把自己手里的牌都告诉甲，这样甲就可以通过核对判断抽出那张牌是什么．但甲和乙之间的联系限于只允许乙发一个密码电报给甲，电报的内容限于只能叫一张牌．这个戏法表现为乙根据手里的牌叫一张牌，甲根据自己手里的牌和乙叫的那张牌把抽出去的牌猜出来．

按一般的估计，乙手里的牌数很多并且数目不确定，通过只叫一张牌似乎不大可能把手里所有的牌的全部情况都告诉甲，这样甲在猜时就难以作确切的判断．因此许多人认为这个戏法实际上是一种魔术，亦即乙一定还用某种高超的技巧向甲传了暗号．然而这个戏法里除了乙叫了一张牌外并没有再另传更多的暗号．用数学仔细分析可以看到，乙只要叫一张牌就可以把甲作判断时所需要的全部信息都传给甲．

一副牌共 52 张，标记一张牌用它的花色和点，点的取值为从 1 到 13．花色共有 4 种：♠♥♦♣．这 4 种按颜色区分，2 种♥♦是红的，2 种♠♣是黑的．还可以把黑桃和红桃统称为桃，把方块和梅花统称为花，则这 4 种按花色区分，2 种♠♥是桃，2 种♦♣是花．这样如果用 Z_n 代表 n 阶循环群，考虑 $G=Z_{13}\times Z_2\times Z_2$ 是 3 个循环群的直乘(直积)群，每一张牌可以和这个群的一个元素一一对应．由于一副牌的所有点数之和可以被 13 整除，因此乙可以看自己手里的牌的点数之和被 13 除后余数是多少，就按这余数来叫那个作为密码电报的牌的点数，如果余数为零就叫 K．甲先算出自己手里的牌的点数之和被 13 除后余数是多少，再通过乙打来的密码电报知道了乙手里牌的余数，就可以算出还缺几点才可以加到一起刚好可以被 13 整除．这缺的点数就是抽出去那张牌的点数．如果刚好一点都不缺，抽出去的那张牌就一定是 K．接着乙要数一下自己手里的红牌张数．如果自己手里有偶数张红牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种红的花色；但如果自己手里

有奇数张红牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种黑的花色．甲也先数自己手里红牌的张数，看是偶数还是奇数．再根据乙通过密码电报提供的乙手中红牌的奇偶性，就可以判断抽出去的那张牌的颜色是红的还是黑的．然后乙还要数一下自己手里的桃牌张数，如果自己手里有偶数张桃牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种桃；但如果自己手里有奇数张桃牌，就在叫那个作为密码电报的牌时叫一种花．甲也先数自己手里桃牌的张数，看是偶数还是奇数．再根据乙通过密码电报提供的乙手中桃牌的奇偶性，就可以判断抽出去的那张牌是桃牌还是花牌．这样乙通过叫一张牌确实就可以把甲作判断所需要的全部信息都传给甲．

从这个例子可以看出，这个戏法变起来使人感到非常奇妙，实际上从群论的观点来看，这个戏法的数学依据非常简单清楚，只用到了群论中最简单的三个循环群的直乘．

再看一个物理学中的典型例子．量子力学中给出氢原子的能级公式为

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2n^2},$$

给定能量后的简并度为 $2n^2$．简并度 2 的出现是由于电子的自旋为 $\frac{1}{2}$，它在任意给定方向的投影有两个可取值即 $\pm\frac{1}{2}$，在没有外磁场时，这两个态的能量是简并的．由于原子核对电子的作用力是一种有心力，电子在原子核周围运动时的轨道角动量是一个守恒量．量子力学给出，在角动量给定为 l 后，沿空间某一特定方向的投影还可以有 $2l+1$ 个不同的值，但它们的能量是相同的，亦即这 $2l+1$ 个态的能量是简并的．然而，氢原子的能级的简并度并不是 $2(2l+1)$，而是 $2n^2$．给定主量子数 n 后，轨道量子数 l 的可取值为

$$l=0,1,\cdots,n-1.$$

对于氢原子来说，主量子数 n 相同而量子数 l 不同的各轨道能量也是简并的，这样简并度为

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2,$$

比由于相互作用是有心力所给出的简并度要大得多. 在经典力学里，如果不考虑电子的韧致辐射的话，给出氢原子的能量将只决定于电子运动轨道的半长轴. 换言之，半长轴相同但轨道角动量不同的轨道具有相同的能量. 这也就是这个更高的简并度的物理来源，它在量子力学里表现为能级按主量子数 n 来确定，主量子数 n 相同但量子数 l 不同的态是简并的. 从数学上来说，由于氢原子中原子核对电子相互作用的特殊性，氢原子的动力机理不仅满足有心力相互作用所具有的 $SO(3)$ 转动群的不变性，而且具有更高的 $SO(4)$ 群的不变性. 氢原子能级的简并度为 $2n^2$ 正是与氢原子具有 $SO(4)$ 群对称性密切相关. 物理上可以很直观地看到氢原子具有 $SO(3)$ 转动群的不变性，但氢原子实际上具有某种更高的 $SO(4)$ 群的不变性就不是很容易判断了.

可以先在经典力学的范围内对氢原子的对称性进行考察. 电子在中心力场中运动的 Hamilton 量为

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r).$$

运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\boldsymbol{p}}{m},$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\nabla V(r).$$

中心力场 Hamilton 量具有三维空间的转动不变性，这决定了角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 是一个守恒量，即

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0.$$

再考察一个正比于 $\mathbf{L}\times\boldsymbol{p}$ 的量随时间的变化

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\mathbf{L}\times\boldsymbol{p}\right)=-r^{2}\frac{dV}{dr}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

由此得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\mathbf{L}\times\boldsymbol{p}+r^{2}\frac{dV}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{d}{dt}\left(r^{2}\frac{dV}{dr}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

对于氢原子来说，势能为

$$V(r)=-\frac{e^{2}}{r},$$

由此得到

$$r^{2}\frac{dV}{dr}=e^{2},$$

代入后得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\mathbf{L}\times\boldsymbol{p}+e^{2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0.$$

这表明氢原子由于势能的特殊性，Runge-Lenz 矢量

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{m}\mathbf{L}\times\boldsymbol{p}+e^{2}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

也是一个守恒矢量，对于经典的椭圆轨道来说，其大小为

$$A=\sqrt{e^{4}+\frac{2L^{2}E}{m}},$$

其方向为从力心指向远核点，这里能量 E 的值小于零。这个守恒矢量的出现反映了椭圆轨道的封闭性，即运动过程中椭圆轨道没有旋进。角动量 $\mathbf{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 守恒反映了中心力场 Hamilton 量具有三维空间的转动不变性，Runge-Lenz 矢量守恒表明氢原子的动力机理可能还具有某种新的旋转对称性。

在量子力学的范围内，对氢原于的对称性进行考察时，仍然有角动量守恒：

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=i[H,\mathbf{L}]=0.$$

为了确定 Runge-Lenz 矢量的形式，考虑

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2m}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\right)=\frac{e^2}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=-\frac{e^2}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right),$$

这样可以看出 Runge-Lenz 矢量应表为

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})+e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

仍是一个守恒矢量．通过 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 适当的线性组合后可以给出一组新算符，它们所有的对易关系和 $SO(4)$群的生成元所满足的对易关系相同，这表明氢原子的动力机理具有某种 $SO(4)$群的对称性，这种对称性称为动力学对称性．

从这个例子可以看出，物理学中所遇到的对称性是丰富多采的，有些对称性的存在是很直观的，很容易就可以认识其存在．但也有些对称性是由动力机理的特殊性质所决定的，这些对称性往往并不很直观，但它们同样是起作用的．在分析物理对象的对称性时，不仅要找出全部具有相当直观性的时间对称性和空间对称性，还要找出所有的不具有直观性的动力学对称性和内部对称性，才能对物理对象的性质特点作出完全的概括和描写．

在人类探索自然规律的过程中，对称性的研究和探索起着重要的作用．物理学在探索新领域中的未知规律时，常常首先是从实验上研究发现一些守恒定律，通过对称性和守恒定律的联系来认识未知规律应具有哪些对称性．

物理学在探索对称性和自然规律的关系方面的一个重要进展是建立了 Noether 定理．这个定理指出：如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，必相应存在一个守恒定律．如果运动规律的某一对称性并不严格成立而有所破缺，则相应的守恒量将变为似近守恒量，物理学家可以根据实际观察到的近似

守恒量近似守恒的程度，推测基本运动规律可能采取的形式. 对称性和对称性的破缺是密切联系的，它们是运动的规律性和多样性在一个侧面的体现. 数学上可以通过变换群的性质给对称性以确切的定量描述，也可以通过变换群的性质给对称性的破缺以确切的定量描述；运动规律的对称性和物理上存在守恒量有直接关系，在一定条件下对称性会发生破缺，并且在某些条件下，对称性还会“自发破缺”. 人们在探索未知的新规律中，不仅充分利用对称性的观念，还充分利用对称性破缺的观念. 人们不仅去探讨如何发现和认识客观存在的对称性，还去探讨如何去发现和认识已经破缺的对称性.

粒子物理学是研究场和粒子的性质、运动、相互作用、相互转化规律的学科，是研究粒子内部结构规律的学科. 粒子物理学是探索物质微观结构规律的前沿学科. 粒子的运动规律中显现出多种多样的丰富的对称性，同时又显现多种多样的对称性破缺现象. 运用群论对粒子运动对称性和对称性破缺规律的探索研究在粒子理论的发展中起过重要的作用，也是粒子理论探索研究中的一个重要方面.

第一章　群和群表示

在这章里，我们并不全面地讨论群论和群表示论的基本内容，也不对基本概念着重从数学上进行探讨，只是扼要地介绍一下有关的群及群表示的基本性质.

§1.1　群和子群

1. 群的定义

群的定义在历史上曾有两种互相等价的提法. 对于一个集合 G 中的元素，定义一个运算(称为乘法)，如果这乘法满足:

(1) 若 $a,b\in G$，则 $ab\in G$;　　(封闭性)

(2) 若 $a,b,c\in G$，则 $(ab)c=a(bc)$;　　(结合律)

(3) 存在 $e\in G$，对任何 $a\in G$，都有 $ea=a$;　　(存在左单位元)

(4) 对任何 $a\in G$，存在 $a^{-1}\in G$，使 $a^{-1}a=e$;　　(存在左逆元)

则 G 构成一个群.

可以证明在上述定义下，右单位元存在并且等于左单位元；右逆元存在并且等于左逆元，因此有些书定义群时把上述(3)和(4)改为存在单位元和存在逆元. 但是严格说来是不必要的，这样把一部分可以证明的东西也放进定义里去了.

群的另一种定义是把上面(3)和(4)合起来用下面一条代替:

(3′) 对任意 $a,b\in G$，一次方程 $xa=b$ 和 $ay=b$ 在 G 中都有唯一的解 x 和 y.

对于这样确定的(3′)能否减弱到只要求对方程 $xa=b$ 有唯一

解，回答是否定的，也就是说条件(3′)不能减弱.

举一个反例：若集合G由两个元素$a'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$和$b'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$组成，乘法为普通矩阵乘法，全部乘法写出来是：

$$a'a'=a',\quad a'b'=a',\quad b'b'=b',\quad b'a'=b'$$

显然封闭性、结合律以及$xa=b$有唯一解都满足，但是这个集合中$ay=b$并没有唯一解，它也确实不构成群.

因此，要审核一个集合对于定义于这个集合上的乘法运算是否构成一个群，除了首先检验其封闭性和结合律是否成立外，取上述两种定义中任何一种的要求来检验就可以了.

在群的定义基础上作以下几点说明：

(1) 乘法的定义中并不要求可对易(即满足交换律)，如果对群G的任何两个元素$a,b\in G$都有$ab=ba$，则称群G为Abel群，否则称为非Abel群.

(2) 群的元素个数称为群的阶.阶数有限的群称为有限群；若群的元素个数无限则称为无限群.

(3) 对有限群的任一元素a，作其幂次a，$a^2,\cdots$，必定可以找到一个幂次n_a，使$a^{n_a}=e$，这式子满足的最小n_a值，称为a的阶.

(4) 如果G中所有元素都可以通过G中某一个元素a的幂次给出，则称G为循环群，循环群是一种Abel群.a称为G的生成元.

2. 子群的定义

子群的定义为：如果群G的一个子集合G'对于群G的乘法构成群，则称G'为G的子群.

对于判别子群下述定理是很重要的：

若$G'\subset G$，G'是群G的子群的必要充分条件是：对于任何a，

$b\in G'$, $ab^{-1}\in G'$.

注意：在这个条件中，并不要求知道 $b^{-1}\in G'$. 实际上从上述条件出发，可以证明 $b^{-1}\in G'$，但不必在条件中事先放进去.

任何群 G 至少有两个子群，一个是只有单位元的群，另一个就是 G 本身，这两个称为显然子群. 其它的子群称为非显然子群，以后一般说到子群时都指非显然子群.

3. 陪集的概念

陪集是与子群密切相关的，若 G' 是 G 的一个子群，a_1 是群 G 的一个不属于 G' 的元素，$g_i\in G'$，则 a_1g_i 组成的集合称为 a_1 生成的 G' 的左陪集，记作 a_1G'，然后再可选一个不属于 G' 和 a_1G' 的 G 的元素 a_2，再作 a_2G'，……，这样作下去把群 G 的元素归入各陪集，这样又得到陪集的集合.

陪集具有下列性质：

(1) 陪集中任一元素所生成的陪集等于原陪集；

(2) 陪集中元素的个数等于子群的阶；

(3) 不同陪集中元素不相交.

根据这几个性质得出对有限群的 Lagrange 定理：有限群的子群的阶是该有限群阶的因子.

$$G\text{ 的阶数}=G'\text{ 的阶数}\times\text{陪集指数①}.$$

由 Lagrange 定理给出对有限群的下述直接推论：

(1) 如果群 G 的阶数为素数，则 G 是 Abel 群，并且是循环群，G 的任一个不为单位元的元素都是循环群的生成元.

(2) 如果群 G 的阶数 $n=n_1n_2$，n_1 和 n_2 为互不相等的两个不为 1 的素数，并且 G 是 Abel 群，则 G 一定是循环群，至少有 $(n_1-1)(n_2-1)$ 个生成元.

---

① 有限群时，陪集的指数就是子群的不同陪集的个数.

这后一个性质并不难推广到 $n=n_1n_2n_3\cdots\cdots$ 的情形，这些性质在刻画有限群的性质和结构时是非常重要的.

我们举几个例子：

例 1　若 P 代表空间反射变换，C 代表正反粒子共轭变换，I 代表不变，则 I,P,C,PC(注意 $PC\neq CP$)，$CP,\hat{C}=PCP,\hat{P}=CPC$，$F=CPCP=PCPC$ 构成一个群 G. 这个群的阶数为 8，是非 Abel 群，它有六个非显然子群：

$$G^{(1)}:\ I,P;\qquad G^{(2)}:\ I,C;$$
$$G^{(3)}:\ I,\hat{P};\qquad G^{(4)}:\ I,\hat{C};$$
$$G^{(5)}:\ I,F;\qquad G^{(6)}:\ I,CP,PC,F.$$

对于子群 $G^{(1)}$ 来说，C 所生成的左陪集为

$$CG^{(1)}:C,CP,$$

右陪集为

$$G^{(1)}C:C,PC.$$

由于 G 不是 Abel 群，一般说来，左陪集和右陪集并不相同.

对于子群 $G^{(6)}$ 来说，C 所生成的左陪集为

$$CG^{(6)}:C,P,\hat{P},\hat{C},$$

右陪集为

$$G^{(6)}C:C,\hat{P},P,\hat{C}.$$

这时左陪集和右陪集相同，这是因为 $G^{(6)}$ 是 G 的一个不变子群. 不变子群的概念将在下一节中讲述.

例 2　考虑一个连续群 G，其中的任意元素用两个连续变化实参量描写：

$$g(\xi_B,\xi_S)=e^{i(\xi_B+\xi_S)},$$

单位元为 $g(0,0)$. 群 G 是一个无限群，并且还是 Abel 群，有许多非显然子群，例如

$$G':g(\xi_B,0)$$

是一个显然子群. $g(0,\xi_S)$所生成的左陪集为

$$g(0,\xi_S)G': g(\xi_B,\xi_S);$$

右陪集为

$$G'g(0,\xi_S): g(\xi_B,\xi_S).$$

在这个例子中因为G是 Abel 群,左陪集和右陪集是相同的.

例 3　包括空间反射的 3 维转动群G中由纯 3 维转动元素构成一个子群G',用空间反射元 P 去左乘子群 G' 得到的就是一个左陪集.

§1.2 不变子群

1. 共轭与共轭类

对于 $g_1, g_2 \in G$,若能找到 $a \in G$,使得 $ag_1a^{-1}=g_2$,则称 g_1 与 g_2 共轭.

在共轭的定义中常用 $ag_1=g_2a$ 代替 $ag_1a^{-1}=g_2$.

对于共轭可作以下说明:

(1) 由于按共轭的定义,可以证明共轭满足等价关系的三个基本要求,因此共轭是等价关系.

一个关系称为等价关系(用～标记),如果它满足下述三个要求:

$g_1 \sim g_1$;

如果 $g_1 \sim g_2$,则 $g_2 \sim g_1$;

如果 $g_1 \sim g_2$, $g_2 \sim g_3$,则 $g_1 \sim g_3$.

(2) 相互共轭的元素全体所组成的集合称为一个共轭元素类.

(3) 共轭元素类内各元素的阶相同.

(4) 共轭元素类内各元素的相同幂次属于同一类.

(5) 单位元 e 构成一类.

在共轭的基础上定义群的中心元素和群的中心：

若一类只有一个元素 e'，则 e' 称为群的中心元素；群的全部中心元素的集合称为群的中心。

对于群的中心可作以下说明：

(1) 群 G 的中心元素 e' 与 G 内任何元素可交换。

(2) 群 G 的中心是 G 的 Abel 子群。

(3) Abel 群的所有元素都是中心元素，群的中心就是这个群自身。

2. 不变子群　子群的共轭变换

定义：若 G' 是群 G 的子群，对任意 $a \in G$ 有 $aG' = G'a$，即左陪集等于右陪集，则称 G' 是 G 的不变子群。

注意，不变子群的定义并不要求对 $g \in G'$ 有 $ag = ga$，而只要求左陪集和右陪集作为集合是相重合的。

对于不变子群，有下列定理和性质：

(1) 定理：子群 G' 是不变子群的充要条件是 G' 由几个完全类组成。

(2) 推论：群 G 的中心是 Abel 不变子群。

(3) 如果 G' 是 G 的一个子群，则对任意给定的 $a \in G$，$aG'a^{-1}$ 仍是一个子群，这个子群的阶与 G' 相同，这样子群共轭变换后仍得到子群。

(4) 考虑由子群 G' 经一切可能的共轭变换得到的各子群中互相独立的若是 m 个，$m=1$ 的充要条件是 G' 是不变子群。

当然每一个群 G 都有两个显然不变子群，即 G 的两个显然子群，但一般所说的不变子群都是指除这两个以外的不变子群。

现在看一个例子．考虑 $SU(2)$ 群，即二维幺模幺正群，它的每一个群元素由三个参数(称为群参数)$\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ 描写，可记为

$$g(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = e^{iI_i \alpha^i},$$

其中

$$I_i=\frac{1}{2}\tau_i,$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\quad \tau_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

由于 $I_i^2=\frac{1}{4}$, $I_iI_j+I_jI_i=0$, $(i\neq j)$, 从而得到

$$(I_i\alpha^i)^2=\frac{1}{4}\alpha^2$$

其中 $\alpha^2=\sum_i(\alpha^i)^2$. 利用矩阵乘法得

$$g(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}(I_i\alpha^i)^n$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}+i\hat{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2},$$

其中 $\hat{\alpha}=\frac{2}{\alpha}I_i\alpha^i$, 它满足 $\hat{\alpha}^2=1$.

$SU(2)$ 群的物理意义与三维转动相联系. $g(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ 描写的转动其转轴方向对空间三个直角坐标轴的余弦分别为 $\frac{\alpha^1}{\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{\alpha}$ 和 $\frac{\alpha^3}{\alpha}$, 而其转角则为 α.

考察元素 $g(0,0,\beta)$ 经过 $g(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ 的共轭变换, 其结果为

$$g(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)g(0,0,\beta)g(-\alpha^1,-\alpha^2,-\alpha^3)$$

$$=\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\hat{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}+i\hat{\beta}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-i\hat{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2}\left\{\left[\cos\alpha+2\left(\frac{\alpha^3}{\alpha}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]\tau_3\right.$$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\left[-\frac{\alpha^2}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^1\alpha^3}{(\alpha)^2}\sin\frac{\alpha}{2}\right]\tau_1$$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{\alpha^1}{\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2\alpha^3}{(\alpha)^2}\sin\frac{\alpha}{2}\right]\tau_2\Big\}.$$

这里虽然取了 $g(0,0,\beta)$ 为绕第三轴的转动，实际上结果是普遍的，因为当只考虑一个转动时，总可以将转轴方向取作第三轴。重要的是再考虑另一个转动时，由于坐标轴方向已有所规定，就不能再这样作而不失普遍性了。

从上式可以看出，$g(0,0,\beta)$ 是 $SU(2)$ 群的中心元素的充要条件是 $\sin\frac{\beta}{2}=0$，这样得到 $SU(2)$ 的中心元素共两个，表成 2×2 矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$SU(2)$ 的中心即由这两个元素构成，它是一个 Z_2 群（即二阶循环群）。

从上式还可以看到，由 $g(0,0,\beta)$ 经共轭变换后得到的元素转轴方向虽然变了，但转角大小不变，即仍为 β。由此可见，同一类的元素转角相同，但转轴方向不同。为了考察是否转角相同的元素都属于同一类，在上式中令 $\alpha^3=0$，即变为

$$\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2}\left\{\cos\alpha\tau_3-\sin\alpha\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha}\tau_1+\sin\alpha\cdot\frac{\alpha^1}{\alpha}\tau_2\right\}$$

这相当于一个转角为 β，转角方向对坐标轴的方向余弦为

$$-\frac{\alpha^2}{\alpha}\sin\alpha,\quad \frac{\alpha^1}{\alpha}\sin\alpha,\quad \cos\alpha$$

的方向。显然，适当选取 α^1 和 α^2 的值，这个方向可取上半球的任意方向，亦即可给出以任意方向为转轴的转角为 β 的转动。上面的讨论对 $\sin\frac{\beta}{2}=0$ 时不能直接适用，但实际上这时由于它是 $SU(2)$ 的中心元素，自身就构成一类，由于转角 $\beta=2n\pi$，转轴取在任何

方向都是一样的. 由此，我们得出：$SU(2)$ 群的元素 $g(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ 中，凡是 $\alpha=\sqrt{(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2+(\alpha^3)^2}$ 相同的元素构成一个类.

$SU(2)$群的中心 Z_2 群是 $SU(2)$ 群的非显然不变子群. 利用不变子群的性质可以证明：除 Z_2 外，$SU(2)$ 群没有其他非显然不变子群. 由于 Z_2 是有限群，因此 $SU(2)$ 群没有连续非显然不变子群.

3. 单纯群与半单纯群

如果群 G 没有非显然不变子群，则称为单纯群；如果群 G 没有非显然 Abel 不变子群，则称为半单纯群.

单纯群和半单纯群在物理学中很重要. 关于一个群 G 是否是单纯群或半单纯群的判断常常需要直接从定义出发，有时也有更为简便的方法. 有以下几方面可以借助：

(1) 群 G 是单纯群的一个必要条件是 G 不能表成两个群的直乘. 因此可以根据这点来判断其是否是单纯群，但要注意它不是充分条件.

由于实际物理研究中所遇到的群在是否可表示为两个群的直乘方面常常是容易判断的，因此，这个判别法在实际工作中特别有用.

(2) 利用不变子群的性质如能证明群 G 的异于单位元素的不变子群只能是群 G 自身，则 G 是单纯群.

(3) 如果一个群 G 可以表成几个单纯群的直乘，其中没有一个是 Abel 群，则 G 是一个半单纯群.

(4) 对于李群来说，可以根据其生成元的李代数结构来判断其是否是单纯群或半单纯群. 这方面的有关判据将在后面再讲. 但是要说明的是这方面的判据直接与判断它是否有不变子李群和不变 Abel 子李群相联系. 因此有时对于李群来说又将单纯李群和半单纯李群的定义修改为是否有不变子李群和不变 Abel 子

李群.

根据以上方法，$SU(n)$群因有不变子群 Z_n 不是单纯群，但因 Z_n 不是李群，按修改后定义它仍是单纯群. 在这定义下，它的子群 $SU(m)\times SU(n-m)\times U(1)$不是单纯群或半单纯群，但 $SU(m)\times SU(n-m)$是半单纯群.

4. 商群

如果 G' 是 G 的不变子群，作 G' 的陪集 g_iG'，不变子群的定义要求 $g_iG'=G'g_i$. 现在考虑另一个群，其元素为 G', g_iG'，乘法规则就是在 G 的乘法规则基础上考虑集合的运算. 由于 $G'G'=G'$，故 G' 是单位元素. $(g_iG')(g_jG')=g_ig_jG'$ 给出了乘法运算的一般规则. 这个新的群 G'' 称为商群，记作

$$G''=G/G'.$$

G'' 的阶数 n'' 等于 G 的阶数 n 除以 G' 的阶数 n'.

要注意，G'' 是群 G 对不变子群 G' 的商群，并不表明 G 可以看作 G' 与 G'' 的直乘. 直乘的概念要求得更强. 实际上如果

$$G=G'\times G''$$

就意味着 G' 和 G'' 都是 G 的不变子群，然而若 G'' 是商群则并不能断定可等价于一个不变子群，它只表明 G' 是不变子群.

§1.3 群的同构和同态

1. 群的同构

如果 f 为从群 G 到群 G' 上的一个一一映象，并且保持乘法运算，即若 $a, b\in G$，则

$$f(a,b)=f(a)f(b),$$

则称 f 为从 G 到 G' 上的同构映象（或称同构对应）. 显然同构映象的逆映象也是同构映象.

互相同构的群本质上数学性质相同，因此只需要研究其中之

一就可以了. 但是要注意的是上面所说的"数学性质相同"只是严格限于在群中所定义的乘法运算和群的结构性质，具体的群还牵涉到的其它数学性质并不包括在内.

我们看一个 n 维循环群 G, 生成元素为 a

$$G: e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}$$

再看一个相角变换群 Z, 其元素为

$$Z: 1, \ e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{2\pi}{n}2}, \cdots, \ e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)},$$

其乘法就是普通乘法.

G 是一个抽象群，Z 是一个具体群，但它们是同构的，因为 $e \to 1$, $a^k \to e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ 是同构映象. 但它的数学性质相同也仅是从群的乘法和结构性质方面. 除此之外，仍然有不同点，例如 Z 的各元素绝对值均为 1, 而对 G 的各元素，绝对值没有定义.

还可以再引入一个具体的群 Z'，其单位元素和生成元素分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp\left[i\frac{2\pi}{n}(n-1)\right] \end{pmatrix},$$

显然 Z' 和 G, Z 都是同构的. 但是对 Z' 群还有性质如下:

单位元素的行列式为 1, 其它元素的行列式为±1; 单位元素的阵迹为 n, 其它元素的阵迹为 0.

这些性质是 Z' 所特有的，对于 G 和 Z 并没有相应的性质.

2. Cayley 定理

在有限群的研究中，一个重要问题是在给定群的阶数后，存在几个互不同构的群. Cayley 定理把这个抽象群的研究归结为一

个具体群的研究.

Cayley 定理：每一个 n 阶群 G 与 S_n 的一个子群同构.

S_n 是 n 阶置换群，群的阶数为 $n!$. 设群 G 的元素为 $a_1, \cdots, a_n$，用其中任一元素 b 左乘，则得 ba_1，$\cdots$，ba_n，这样可用置换 $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ ba_1 & \cdots & ba_n \end{pmatrix}$ 与 b 对应. 可以验证这样的对应保持乘法规则，因此它是一个 G 到 S_n 的一个子群的同构映象，定理证完.

推论：给定阶数 n 下不同构的群的数目有限.

根据 Cayley 定理，给定阶数后，不同构的群数目有限并且只需在 S_n 的子群中去找. 由于对于置换群 S_n 已经研究得很清楚，这样去作并不困难.

3. 群的自同构

一个群 G 到它自己上的同构映象称为 G 的一个自同构（映象）. 把群的自同构看作是一个元素，而把两个自同构接续操作看作是两个自同构相乘. 在这样定义下，显然群 G 的所有自同构构成一个群，称为 G 的自同构群.

若对于任何 $b \in G$，映象 $b \to aba^{-1}$（其中 a 是 G 中某确定的元素）是群 G 的一个自同构，称为 G 的内自同构. 不能表成这形式的称为外自同构. 每一个内自同构由元素 a 确定. 所有内自同构的全体构成了 G 的自同构群的一个子群，并且与 G 本身或 G 的一个子群同构.

如果 G 是 Abel 群，则 G 的内自同构只有一个，即自同构群的单位元素. 对于非 Abel 群，则不会发生这情况. 这个概念所以重要，因为 G 的自同构群有可能比 G 还要大，也就是说它的一个子群和 G 同构. 这是在群 G 的基础上，并未规定新的运算规则直接得出的更大的群. 一般从一个群中导出更小的群来是很容易的，可以保留原有乘法定义去找该群的子群. 然而从群 G 出发去找比

G 更大的群，常需要重新定义运算规则. 在自同构群的引入过程中这个问题比较自然地解决了.

自同构群与置换群有一定的联系. 考虑一个阶数为 n 的群 G，每一个自同构映象就相当于群元素间的一个置换，自同构群相当于置换群 S_n，群 G 和 G 的自同构群的一个子群同构或同态就对应于阶数为 n 的群和 S_n 的一个子群同构. 然而 S_n 的阶数为 $n!$，远大于 n. 但是自同构群可以不一定是有限群，完全可以是无限群.

4. 群的同态

如果 f 为群 G 到群 G' 上的一个映象，f 保持乘法规则，则称 f 为从 G 到 G' 的同态映象，对应 G' 中单位元素 e' 的 G 中的元素称为同态映象 f 的核.

关于同态映象有下述重要性质：

(1) 若 f 是群 G 到群 G' 上的同态映象，N 为 f 的核，则 N 为 G 的不变子群，G' 与 G/N 同构.

(2) 同态映象具有确定的多一对应关系.

(3) 在从群 G 到群 G' 的同态映象下，G 的子群和不变子群分别一一对应于 G' 的子群和不变子群.

(4) 两个单纯群之间不可能建立不是同构映象的同态映象.

§1.4 群的直乘与生成

1. 群的直乘

若给定群 G' 和 G''，用 $a'_k \in G'$ 和 $a''_l \in G''$ 表示它们各自的元素. 定义元素 $a_{kl}=(a'_k, a''_l)$，定义乘法

$$(a'_1, a''_1)(a'_2, a''_2)=(a'_1a'_2, a''_1a''_2)$$

则元素 (a'_k, a''_l) 构成一个新群 G，阶为 G' 与 G'' 的阶 n' 和 n'' 的乘积，$n=n'n''$.

由此可以导出以下推论:

(1) 由(a', e'')组成的群是与G'同构的群，并是G的不变子群(记作N')；由(e', a'')构成的群是与G''同构的群，并是G的不变子群(记作N'')。

(2) G'与G/N''同构，G''与G/N'同构。

按上面这样构成的群G称为群G'和G''的直乘，记作

$$G = G' \times G''$$

群的直乘在物理理论中用得很多，但在使用时，为了准确地了解其含意，有以下几点值得注意:

(1) 当作群G'与群G''的直乘时，按上面这样定义的规则自然保证了G中与G'和G''同构的子群N'和N''的元素互相对易。当这样作时，对于抽象的群是没有问题的，因为G'和G''的元素之间的乘法本来并无定义。在直乘的定义中自然规定了与G'和G''同构的群N'和N''元素的乘法。由于G'和G''分别与N'和N''同构，这个乘法规则往往被自然推广到G'和G''之间来，这也并不在理论上带来困难。

但是当考虑两个具体的群G'和G''时，这两个群的运算规则常常是由它们的物理含意所确定的，就需要考察：从它们本身的物理含意前提是否可以如上地引入直乘而不带来困难。或者说，如何使直乘的物理意义能符合原来群的物理含意的自然推广。这就是实际工作中常要处理的问题。

举一个例子：在空间绕第三轴的转动和绕第二轴的转动分别都构成一个$U(1)$群，记作G_3和G_2，其群元素可利用$SU(2)$群的表述法表为

$$g(0, \alpha^2, 0) = e^{iI_2\alpha^2} \in G_2,$$

$$g(0, 0, \alpha^3) = e^{iI_3\alpha^3} \in G_3,$$

当要考虑$G_2 \times G_3$时，就要考察按原来含意的自然推广是否能保证

$g(0,\alpha^2,0)$和$g(0,0,\alpha^3)$是可交换的．如果这两个群是在不同空间上的转动，它们可交换是没有问题的．但如果物理上要求这两个群是在同一个三维空间的转动，按照原定义的自然推广就不能满足可交换性的要求．事实上这时得到的不是$U(1)\times U(1)$群而是$SU(2)$群．

在这个例子中可以看到的是：如果两个$U(1)$转动群是作用在不同空间上的，则它们是可交换的，即互相独立的，这时考虑它们的合效果时，可以作它们的直乘群$U(1)\times U(1)$；如果它们是作用在同一空间上的，是不可交换的，即不互相独立，这时考虑它们的合效果时，就不应形式地作直乘群，而应由两个$U(1)$生成一个$SU(2)$群．

因此在实际应用中，当要统一描写两个群的合效果时，首先应审查这两个群的元素从物理含意来源上是否可对易（即是否互相独立），从而确定究竟应作群的直乘还是群的生成．

(2) 从上面的分析也可以看到，$G=G'\times G''$的要求是很强的．如果把群理解为某一空间上的变换，则G'与G''作用的空间互相正交，而G的元素对应的是对这两个空间分别作变换的合效果．如果G'和G''分别为n'阶和n''阶，则G由N'和N''拼成，有$n'n''$个元素，如图1.1所示，G'和G''互相独立也就反映在N'和N''互相

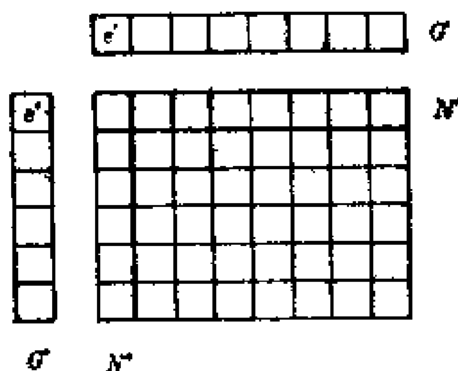


图1.1 群的直乘示意图

独立.

2. 群按直乘分解

实际工作中常常需要把群的直乘倒过来作，即需要解决的是给定一个群 G，是否可以把它写作两个群的直乘. 这个问题的回答是:

如果 N', N'' 是 G 的不变子群，并且

$$N'N'' = G, \quad N' \cap N'' = e,$$

则 G 的元素可表为 $a'_k a''_l$，且与次序无关，这时称 G 按不变子群 N' 和 N'' 的直乘分解，即

$$G = N' \times N''.$$

这个结论的证明中关键的一步是证明与次序无关，有了这一点后，就可直接作 N' 和 N'' 的直乘了，证明如下:

由于 $N'N'' = G$, G 的元素可表为 $a'_k a''_l$;

由于 N' 是不变子群 $a'_1 a''_1 = a''_1 a'_2$,

由于 N'' 是不变子群 $a'_1 a''_1 = a''_2 a'_1$,

由此得到 $a''_1 a'_2 = a''_2 a'_1$，将此式左乘 a''^{-1}_1，右乘 a'^{-1}_1，则得 $a'_2 a'^{-1}_1 = a''^{-1}_1 a''_2$. 由于等式左边是 N' 的元素，右边是 N'' 的元素，它们相等，只能是 $N' \cap N'' = e$. 由此得到 $a'_2 = a'_1$，$a''_2 = a''_1$，亦即 $a'_1 a''_1 = a''_1 a'_1$，证完.

从上面的讨论得知群 G 能分解为 $N' \times N''$ 的条件是 N' 和 N'' 是不变子群，并且 $N'N'' = G$, $N' \cap N'' = e$.

例: n 维复空间的幺正变换构成一个群 $U(n)$，它的元素 u 可以用 $n \times n$ 的复矩阵 u_{ij} 代表，并满足幺正条件

$$u^+ u = uu^+ = I, \ (\text{或 } u^+ = u^{-1})$$

求行列式

$$1 = \det(uu^+) = (\det u)(\det u^+) = |(\det u)|^2.$$

因此总可将 $\det u$ 表为 $e^{i\lambda}$ 形，这样 u 总可表为

$$u=e^{i\lambda}u', \det u'=1,$$

容易验证 $e^{i\lambda}$ 组成的群和 u' 组成的群都是 $U(n)$ 的不变子群，并且它们的公共元素就是单位元素，因此 $U(n)$ 群总可按直乘分解为

$$U(n)=U(1)\times SU(n).$$

3. 子群的生成

实际工作中常遇到的一个问题是已知一个群 G，但在处理的问题中只牵涉到群 G 的一部分元素，需要了解的是如何根据所牵涉到的群元素出发找到包括这些元素的群 G 的最小子群，这就是子群的生成问题.

关于子群的生成有下列基本定理：

如果取定 G 中的若干元素组成的集合 S，作任意乘积 $g'=S_1\cdots S_k$，其中 $S_1,\cdots,S_k\in S\cup S^{-1}$，则 g' 的全体构成 G 的一个子群 G'，G' 为 G 的包含 S 的各子群之交.

根据这个定理，可导出以下推论：

(1) 若 S 只包含一个元素，则生成的子群即为 S 生成的循环子群.

(2) 若群 G 的阶 $n=n_1n_2$，其中 n_1 和 n_2 为素数，找到一个阶为 n_1 的子群，再加一个元素则生成的子群必为整个群.

(3) 若群 G 的阶 $n=n_1n_2$，其中 n_1 和 n_2 为素数，有一个不变子群 N 的阶为 n_1，则 G 中不属于 N 的元素的阶数为 n_2 或 $n(=n_1n_2)$.

(4) 若群 G 的阶 $n=n_1n_2$，其中 n_1 和 n_2 为素数，G 有一个阶为 n_1 的不变子群 N，且 G 是非 Abel 群，则 G 中不属于 N 的元素的阶数只能是 n_2.

4. 群的生成

如果在考虑子群的生成时，不是从某些元素的集合出发，而是从已知子群出发，则有以下定理和规则可用：

(1) 若 G' 是 G 的子群，N 是 G 的不变子群，则 $G'N=NG'$ 是

G 的子群

(2) 若 G' 也是 G 的不变子群，则 $G'N$ 也是 G 的不变子群.

(3) 若 $G'\cap N=e$ 时，所生成的子群可由 G' 作 N 的陪集给出，阶数为 G' 和 N 的阶数之积.

利用上面这些性质生成的是 G 的子群，也有可能就是群 G 本身.

在实际工作中更常遇到的问题是：已知群 G' 和 N，需要由 G' 和 N 生成一个群 G, N 为其不变子群, G' 为其子群.

遇到这类问题可以如下处理.

若 $a'\in G'$, $a''\in N$, 作 $a'a''$ 为生成的群元素. 定义

$$e'e''=e''e'=e,$$
$$e'a''=a''e'=a'',$$
$$a'e''=e''a'=a'.$$

乘法规则除保持原有 G' 与 N 的乘法规则外，还要补充

$$a_1'a_1''=a_2''a_1'$$

这样才能保证 N 将来是不变子群. 这个规则要和原来 G' 和 N 的乘法规则一起保证确实给出群，为此这补充法则必须满足结合律

$$a_1''(a_2''a')=(a_1''a_2'')a',$$
$$a''(a_1'a_2')=(a''a_1')a_2'.$$

上述乘法规则又可写作

$$a_2''a_1'=a_1'(A_1a_2'')=a_1'a_1'',$$

其中 A_1 表示一个由 a_1' 决定的对 N 的元素的置换. 在这表示法之下，上述结合律的第一式表现为

$$a_1''(a_2''a')=a_1''a'(Aa_2'')=a'(Aa_1'')(Aa_2''),$$
$$(a_1''a_2'')a'=a'(A(a_1''a_2'')),$$

即要求

$$A_{12}a'' = A_2(A_1a'').$$

此外这补充规则还必须与单位元素 e 的定义协调:

$$ea'' = a''e = a'',$$

$$a'e = ea' = a',$$

这样就得到了由 G' 和 N 生成的一个群.

以上的作法给出了由子群生成群的方法，这里主要的复杂性在于确定乘法的补充规则要满足一定的要求. 当然，如果把补充规则直接定为 a' 和 a'' 可以交换，所有的这些要求都能够满足，这样生成的群实际上就是 G' 和 N 的直乘群. 尽管这样作对抽象群来说原则上总是可以的，但是在实际物理问题研究中，G' 和 N 的乘法都是有物理含意作背景的，把它们统一到一起生成更大的群时，并不一定都能与群的直乘的要求(指 G' 和 N 的元素的可交换性)协调. 在这时就需要考虑由 G' 和 N 生成群 G 的可能性.

换言之，群的直乘在数学处理上虽比群的生成简单，但在物理上要求更强，限制更大. 在许多情况中，物理上的要求还是反映为需要考虑群的生成问题.

在实际应用中，如果 G' 和 N 都是某种变换群，常由变换的定义就可以看到是否有一个更大的群存在而 G' 和 N 是其子群. 这时补充法则是否满足要求往往可以直接由这个更大的群是否存在而判定.

现在看群的生成的一个典型例子. 在 J/ψ 粒子发现后，探讨新粒子的可能解释的过程中，曾经考虑过它是色空间激发态的可能性. 在这方面的探索中曾经研究过色空间对称性是 S_3^c 群的可能性. 这个 S_3^c 群就是 S_3 置换群和三个 $U(1)$ 群生成的群.

在一个三维复空间上，引入三维置换群 $G' \equiv S_3$，它的阶数为6，其元素可表为

$G \equiv S_3$:

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad (12)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(23)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad (13)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$(123)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ (123)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

再引入三个 $U(1)$ 的直乘群 $N\equiv U(1)\times U(1)\times U(1)$，其元素可表为

$N=(U(1))^3$:

$$\begin{pmatrix}e^{i\alpha}&0&0\\0&e^{i\beta}&0\\0&0&e^{i\gamma}\end{pmatrix},$$

由 $G'\equiv S_3$ 和 $N\equiv(U(1))^3$ 生成的群 G 的元素为

$$\begin{pmatrix}e^{i\alpha}&0&0\\0&e^{i\beta}&0\\0&0&e^{i\gamma}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&e^{i\beta}&0\\e^{i\alpha}&0&0\\0&0&e^{i\gamma}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}e^{i\alpha}&0&0\\0&0&e^{i\gamma}\\0&e^{i\beta}&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&e^{i\gamma}\\0&e^{i\beta}&0\\e^{i\alpha}&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&e^{i\beta}&0\\0&0&e^{i\gamma}\\e^{i\alpha}&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&e^{i\gamma}\\e^{i\alpha}&0&0\\0&e^{i\beta}&0\end{pmatrix}.$$

补充的乘法规则是

$$e\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} e,$$

$$(12)\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix}(12),$$

$$(23)\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}(23),$$

$$(13)\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}(13),$$

$$(123)\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}(123),$$

$$(132)\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}(132).$$

这样由 S_3 和 $(U(1))^3$ 生成的群 G 并不是它们的直乘，因为 S_3 并不是 G 的不变子群．原来三个 $U(1)$ 是互相独立的，现在通过 S_3 把三个 $U(1)$ 空间混起来了，它们不再互相独立并且它们与 S_3 也不互相独立了．因此这样得到的群 G，其性质完全不同于 S_3，也完全不同于 $(U(1))^3$．

从这个例子也可以看到，如果由两个群直乘得到一个群，则这个群的性质可以直接由这两个群的性质反映出来．但是如果由两个群生成一个群，这个群的性质就可能与原来的两个群完全不同．由此可见，根据实际需要由已知的群生成更大的群的工作在物理的理论研究中是很重要的．

§1.5 群 表 示

1. 群的表示

如果群G的每一个元素g_k对应于某给定线性空间L上的一个线性变换矩阵A_k，并且这个对应保持乘法的对应

$$g_1g_2 \longrightarrow A_1A_2,$$

则称在L上给出了群G的一个表示．线性空间的维数称为表示的维数．

对于表示的概念，要注意以下各点：

(1) A_k的全体构成一个群，$g_k \to A_k$的对应给出了群G到矩阵群A上的同态映象；

(2) A是G的表示的必要条件是对一切A_k，$\det A_k \neq 0$；

(3) 表示的维数可以是有限的也可以是无穷；

(4) 如果群G的所有元素都对应于单位矩阵，这单位矩阵也构成群的一个表示，称为显然表示．

2. 忠实表示

如果群G的表示A与G同构，则A称为G的忠实表示．

忠实表示的重要性由以下定理反映出来．

定理：群G是单纯群的充分必要条件是群G只有显然表示和忠实表示．

对于有限群G来说，可以很容易地构造出一个忠实表示，即正规表示．若G为n阶，把G的n个元素排成一个n维矢量，用某个g_k去左乘，得到的仍是G的各元素，但排列次序改变了．这个改变相当于G的各元素之间的一个置换，把它通过n维矩阵表示出来，就得到群G的正规表示．

3. 等价表示

若A是群G的一个表示，X为一个任意的相同阶的矩阵，并且

$\det X \neq 0$，则

$$A'_k = XA_kX^{-1}$$

给出群G的相同维的表示，这两个表示A和A'称为等价表示.

给定一个表示A后，原则上可以得到无穷多个与其等价的表示，但它们的性质相同，因此只要研究其中之一就可以了，问题是要在互相等价的各表示中，选出一个最便于研究的表示.

4. 表示的行列式与行列式表示

(1) 如果A和B是群G的两个等价有限维表示，则

$$\det A_k = \det B_k.$$

(2) 如果g_j与g_k属于同一共轭元素类. A为G的有限维表示，则

$$\det A_j = \det A_k.$$

(3) 任何有限群G的有限维表示A中，矩阵A_k的行列式必可表为$e^{i\frac{2\pi}{n}}$的幂次，其中n为群G的阶数。

(4) 若A为G的有限维表示，则$\det A_k$给出G的一个一维表示，称为由A得到的G的行列式表示.

(5) 群G的行列式表示的整数次幂仍给出群G的一个一维表示.

(6) 与行列式表示中1对应的群元素构成群G的一个不变子群.

5. 完全可约、可约和不可约

最后介绍几个定义：

(1) 若A和B是群G的两个表示，其阶数分别为n_A和n_B，则

$$C=\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

也是群G的表示，其维数为n_A+n_B.

(2) 如果一个表示是由若干个表示沿对角排列而成，各表示之间的非对角矩阵元为零，则称该表示为既约表示.

(3) 如果对一个既约表示 C 作等价变换 XCX^{-1}，得到的表示一般不再具有既约表示的形式，但它仍和原表示同构，且维数相同，数学性质是相关的. 因此定义：如果表示 C' 与一个既约表示 C 等价则称为完全可约的.

(4) 若表示 C' 的一个等价表示 C 的形式是由若干个表示沿对角线排列而成，其左下部各表示之间的非对角矩阵元为零，则 C' 称为可约表示.

(5) 既非完全可约表示也非可约表示的表示称为不可约表示.

群表示论要研究的实际上是给定一个群 G 后如何找出它的全部表示. 这个问题根据上述分析最后转化为如何找出它的全部互不等价的不可约表示.

§1.6 群表示的一些定理

关于群表示的分布有一系列定理，对于有限群和无限群定理的表述也有所不同. 我们这里并不详述这些定理，只是就有限群的情形，介绍几个基本定理以对群表示的一些重要性质作具体的说明.

1. U 表示的基本定理

如果群 G 的一个表示 A 中的所有矩阵 A_k 都是幺正矩阵(即 U 矩阵)，满足

$$A_k^+A_k=A_kA_k^+=I,$$

则群 G 的这个表示 A 称为幺正表示(U 表示).

U 表示的基本性质：如果一个 U 表示可约则它完全可约.

推论：可约 U 表示等价于一些不可约 U 表示的直和.

这样对可约U表示的研究就归结为对不可约U表示的研究了. 最后问题归结为: 是否每一个表示都等价于一个U表示.

定理: 有限群的每一个表示都等价于一个U表示.

证明:

若有限群有一个n维表示A, 考虑$\sum_k A_k^+ A_k$, 它是厄米矩阵, 本征值是实数, 可以通过幺正矩阵S对角化, 即

$$S\sum_k A_k^+ A_k S^+$$

为对角矩阵. 引入

$$A_k'' = S A_k S^+,$$

则对角化后为

$$\sum_k A_k''^+ A_k''.$$

考察对角化后的第i个本征值, 它可表为

$$\left(\sum_k A_k''^+ A_k''\right)_{ii} = \sum_k \sum_j (A_k''^+)_{ij} (A_k'')_{ji}$$

$$= \sum_k \sum_j |(A_k'')_{ji}|^2 \geqslant 0,$$

但实际上不能等于零. 因为如果它等于零, 则所有A_k''的第i列都是零, 这表明$\det A_k'' = 0$, 与构成表示矛盾. 由此可表为

$$\sum_k A_k''^+ A_k'' = \Lambda^2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n为正实数, 值得注意的是矩阵Λ^2具有下列性质:

$$
\begin{aligned}
A_j''^+ A^2 A_j'' &= \sum_k (A_k'' A_j'')^+ (A_k'' A_j'') \\
&= A^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_j'' A^{-2} A_j''^+ &= (A_j''^{-1})^{-1} (A^2)^{-1} (A_j''^{-1})^{-1+} \\
&= [(A_j''^{-1})^+ A^2 (A_j''^{-1})]^{-1} \\
&= (A^2)^{-1} = A^{-2},
\end{aligned}
$$

引入 $A_k' = A A_k'' A^{-1}$，显然 A_k' 也是一个表示，但它满足

$$
\begin{aligned}
A_j' A_j'^+ &= A A_j'' A^{-2} A_j''^+ A \\
&= A A^{-2} A = I, \\
A_j'^+ A_j' &= A^{-1} A_j''^+ A^2 A_j'' A^{-1} \\
&= A^{-1} A^2 A^{-1} = I.
\end{aligned}
$$

即

$$
A_k' = A S A_k S^+ A^{-1} = A S A_k (A S)^{-1}
$$

是与 A 等价的表示的元素．证完．

根据这个定理，有限群表示的研究完全归结为 U 表示的研究．

现在下一步的问题是对于无限群怎么办．无限群有两种情形，一种是群元素是离散型分布；还有一种是群元素是连续型分布．考察上面的证明，群的维数并没有具体用到，实际用到的是表示的维数有限．如果把群的维数推广到无限群，主要的问题在于 $\sum_k A_k^+ A_k$ 推广后是否存在，亦即

$$
\sum_{k=k_0}^{\infty} A_k^+ A_k \quad 或 \quad \int A^+(k) A(k)\, dk
$$

是否存在．这后一式中还存在一个问题是标记群元素的参数 k 如何取．因为换一个参数 l 来标记群元素时，如果 $k = k(l)$ 则上式变为

$$
\int A^+(l) A(l) \frac{dk}{dl} dl,
$$

这和直接通过 l 写出的 $\int A^+(l)A(l)dl$ 显然是不一样的. 所以对群元素的标记参数 k 的选取要有所限制. 这个限制还可从离散型中得到启示.

对于 $\sum_k A_k^+A_k$ 有一个重要性质，即对任意群元素表示矩阵 A_i，下式

$$A_i^+\left(\sum_k A_k^+A_k\right)A_i=\sum_k (A_kA_i)^+(A_kA_i)$$

$$=\sum_k A_k^+A_k$$

成立. 这最后一步是由于当 A_k 跑过所有表示矩阵时，A_kA_i 也跑过所有的表示矩阵. 这个性质推广到连续群的表示时，即要求

$$A^+(i)\int A^+(k)A(k)dkA(i)$$

$$=\int (A(k)A(i))^+(A(k)A(i))dk$$

能够等于

$$\int A^+(k)A(k)dk.$$

若 $A(k)A(i)=A(j)$ 是由群的乘法规定的结果，则 j 显然是 k 和 i 的函数 $j=j(k,i)$. 现在考察函数 j 的形式，上式变为

$$\int A^+(j)A(j)dk.$$

如果要求能化成 $\int A^+(k)A(k)dk$，实际上要求 $dj=dk$ 亦即 $j=k+j'(i)$，其中 $j'(i)$ 只是 i 的函数. 可以确定 $j'(i)$ 的形式如下:

令 $A(i)$ 为单位元素的表示，这时 $j=k$，因此对单位元素 j' 取零值.

考察 $A(l)A(m)A(k)$，利用结合律得

$$l+j'(m)+j'(k)=l+j'(m+j'(k)),$$

由此可以定出 $j'(k)=k+a$，a 为常数，如取单位元素对应的 k 值规定为零，则 $a=0$. 这样上述要求可归结为：对于连续群选择的标志群元素的群参数 k 具有性质：

若 $A(k)A(i)=A(j)$，则 $j=k+i$；

$I=A(0)$；

$A^{-1}(k)=A(-k)$；

再利用这个参数所表达出来的积分

$$\int A^+(k)A(k)dk$$

是离散情形下 $\sum_k A_k^+A_k$ 的直接推广.

现在问题归结为对无限群

$$\sum_k^{\infty} A_k^+A_k \quad \text{或} \quad \int A^+(k)A(k)dk$$

是否收敛的问题. 由于涉及无限问题，有时又采用下述式子来讨论：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_k^N A_k^+A_k, \qquad \frac{1}{\int dk}\int A^+(k)A(k)dk,$$

在这基础上发展了平均值泛函和群积分的概念. 这些讨论表明：对有限群的这个定理推广到无限群时是有条件的，不是普遍成立的. 这个条件主要涉及到在证明中所引用式子的收敛性是否存在.

2. 正交性定理

首先考察表示产生的函数的概念. 如果把群元素看作是自变量 g 的可取值为 g_1，g_2，…，g_k，…，g 的任一个函数都是群函数.

如果 $\varphi(g)$ 是群函数，如果群是 N 阶，则自变量 g 有 N 个取值

$g_1, g_2, \cdots, g_N$，函数值也相应有N个取值．$\varphi(g)$可以看作N维空间的一个矢量，N维空间的基为$g_1, \cdots, g_N$，这矢量在基上的分量为$\varphi(g_1), \cdots, \varphi(g_N)$．根据这个对比，自然引入群函数的内积的概念：群函数φ与ψ的标积(即内积)定义为

$$(\psi, \varphi) = \frac{1}{N}\sum_{k}^{N}\psi^*(g_k)\varphi(g_k),$$

它显然满足通常内积的一切要求．

但通常引入标积时还保持在基底作一定的变换（例如幺正变换)下标积不变，现在的标积则保持在群变换下不变．考虑群的某给定元素g_i，以g_i去乘$g_1, \cdots g_N$，所得到的仍是群的所有元素，但其位置改变了．这个结果可以理解作g_i对这个N维空间的基底实现了一个变换．由于群中共有N个元素，一共定义了N个独立的变换．现在定义的群函数的标积在这N个独立的变换（统称为群变换)下不变．

这样引入的标积在一定条件下可以推广到无限维群中去，推广中遇到的问题在上面已经分析过了．

如果A是群G的n维表示，则群元素g_k的表示矩阵$A(g_k)$就是一个矩阵群函数，也就是n^2个群函数$A_{ij}(g_k), (i, j = 1, \cdots, n)$，排成矩阵形式．如果按照标积的定义求$A_{jl}$和$A_{ji}$的标积，则得

$$(A_{ji}, A_{jl}) = \frac{1}{N}\sum_{k}^{N}A_{ji}^*(g_k)A_{jl}(g_k)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k}^{N}A_{ij}^+(g_k)A_{jl}(g_k),$$

这个内积还有三个脚标i, j, l，如果对j求和，则得

$$\frac{1}{N}\sum_{k}^{N}(A^+(g_k)A(g_k))_{il},$$

这正是上一节里用到的表达式.

Schur 引理:

(1) 若对群 G 的一个不可约表示 A，矩阵 M 与所有的 A_k 对易，即 $MA_k = A_kM$，则 M 是单位矩阵的某一倍数 $M = \lambda I$，λ 为某数;

(2) 若对群 G 的两个不等价的不可约表示 A 和 B，如果矩阵 M 将表示 A 所在的空间变换到表示 B 所在的空间并保持群元素表示矩阵的对应关系

$$MA_k = B_l M,$$

则

$$M \equiv 0.$$

有了上述概念和引理作基础，可以证明正交性定理:

若群的两个不等价的不可约表示 A 和 B 的维数分别为 n_A 和 n_B，则

$$(A_{ij}, B_{i'j'}) = 0,$$

$$(A_{ij}, A_{i'j'}) = \frac{1}{n_A}\delta_{ii'}\delta_{jj'}.$$

从这个定理可以看出若群的阶数为 N，由于 N 维空间互相独立的矢量最多只有 N 个，因此 $n_A^2 < N$. 关于这一点后面还要讨论.

这个定理给出不可约表示所给出的群函数的正交性. 下面讨论完备性定理.

3. 完备性定理

定理: 有限群 G 的所有不等价不可约 U 表示所产生的函数 $A_{ij}^{(\nu)}(g_k)$，在群上所有函数的空间中是完备的.

这个定理也可以表述为: 有限群 G 上的任意群函数 $\varphi(g)$ 都可以分解为 $A_{ij}^{(\nu)}(g)$ 的线性组合.

这个定理的一个直接推论是: 有限群 G 的所有不等价不可约

U 表示的维数平方和等于群的阶数，即

$$\sum_k n_k^2 = N.$$

这个推论在有限群的表示理论中非常有用，它在给定一个有限群后分析其可能有的不可约表示时很重要. 例如三维置换群S_3，其维数 $N=6$，根据这个推论，只有两个可能性：$6=4+1+1$ 或 $6=1+1+1+1+1+1$ 两种可能性，实际发生的是前者. 又如对于 8 维有限群，按上推理，只有三个可能性：$8=4+4$，$8=4+1+1+1+1$ 和 $8=1+1+1+1+1+1+1+1$，但第一个可能性应被排除，因为有限群至少有一个一维不可约表示(由任何表示得到的行列式表示总是一维表示)，因此只要考察后两个可能性.

§1.7 群的直乘和表示的直乘

1. 矩阵的直乘

在讨论表示的直乘之前首先要了解矩阵的直乘，因为所有的表示总是通过矩阵的形式表述出来. 当我们有两个矩阵 A 和 B 时，其矩阵元分别为 A_{ik} 和 B_{jl}，则 C 矩阵称为 A 和 B 的直乘，记为 $C=A\times B$，C 的矩阵元为

$$C_{ijkl}=A_{ik}B_{jl}$$

注意 C_{ijkl} 中 ij 是一组，合起来起第一个脚标的作用；kl 是一组，合起来起第二个脚标的作用.

如果 A 和 B 的维数分别为 n_A 和 n_B，则 C 的维数为 n_An_B.

对于矩阵的直乘还有下述基本性质：

(1) 若 A 和 B 是对角矩阵，则 C 也是对角矩阵；若 A 和 B 是单位矩阵，则 C 也是单位矩阵.

(2) 若 A 和 B 是幺正矩阵，则 C 也是幺正矩阵.

(3) $(A_1\times B_1)(A_2\times B_2)=(A_1A_2)\times(B_1B_2)$.

2. 群的直乘和表示的直乘

如果群 G 是由群 G_1 和 G_2 直乘所给出，若 A_1 和 A_2 分别为 G_1 和 G_2 的一个表示，则

$$A=A_1\times A_2$$

是 G 的一个表示。如果 A_1 和 A_2 分别是 G_1 和 G_2 的不可约表示，则所得到的 A 是 G 的不可约表示。

但是这并不是说 G 的表示都可以表示为 $A=A_1\times A_2$ 的形式。

例：若有群 $G_1: e^{i\alpha}, G_2: e^{i\beta}$，$G=G_1\times G_2$ 可表为

$$G:(e^{i\alpha}, e^{i\beta}).$$

考察它们的表示

若 $A_1=e^{i\alpha}$，$A_2=e^{i\beta}$ 都是一维表示，则

$$A=A_1\times A_2=e^{i(\alpha+\beta)}$$

也是一维表示。

若 $A_1=\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}$都是二维表示，则 $A=A_1\times A_2$ 应表现为 4 维表示

$$A=\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\alpha+\beta)} & \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

实际工作中还常用到的是同一个群的两个不可约表示直乘，若这两个表示的维数分别为 n_1 和 n_2，则直乘后得到的表示为 n_1n_2 维，一般说来它不一定是不可约表示，并可表为不可约表示的直和。

§1.8 特征标理论

1. 特征标

定义：群 G 的表示 A 在任意基上矩阵阵迹

$$\chi_k = \mathrm{Tr}A_k = \sum_i (A_k)_{ii}$$

称为特征标.

对于每一个群元素 g_k 的表示矩阵 A_k,特征标是一个数，这个数是一个依赖于表示的群函数. 由于群的元素共有 N 个（群的阶数),给定群的表示后,对应于 N 个群元素有 N 个特征标值,它们合起来相当于 N 维空间里的矢量. 不论表示本身的维数多少，它都对应于这样一个矢量，因此特征标又可看作以表示为自变量的 N 维空间里的矢量函数.

2. 特征标的基本性质

(1) 特征标与基底无关,亦即等价的表示特征标完全相同.

按这个性质，特征标作为表示的矢量函数不可被用来区分互相等价的表示.

(2) 不可约表示的特征标是正交归一的:

$$(\chi^{(i)},\ \chi^{(j)}) = \frac{1}{N}\sum_k^N \chi_k^{(i)*}\chi_k^{(j)} = \delta_{ij}.$$

(3) 可约表示的特征标为所包含不可约表示特征标之和:

$$\chi = \sum_j m_j \chi^{(j)}$$

其中 $\chi^{(j)}$ 为第 j 不可约表示的特征标,m_j 为第 j 不可约表示在可约表示中出现的重数,它可由

$$m_j = (\chi^j, \chi)$$

给出,但 m_j 确定可约表示中第 j 不可约表示的重数时，并不区分等价的不可约表示.

将 χ 对自己求内积得

$$(\chi,\ \chi) = \sum_j m_j^2$$

由于不可约表示特征标的归一性，上式对不可约表示应该得 1. 对于可约表示，由于它至少应能分解成两个不可约表示之和，因此上式的值至少为 2. 所以这式可以作为一个表示是否是不可约表示的判据.

需要强调的是，不论有限群还是无限群的表示，只要表示维数有限，特征标的存在是没有问题的. 只是对于无限群来说，如上定义的标积的收敛性还需要加以注意，这在前面已经指出了. 上面的这些性质表明特征标在研究群表示的性质时是一个非常有力的工具. 首先可以判断一个表示是不是可约表示；如果是可约表示还可以估计其可能的分解方式；对于几个同维的不可约表示，还可以判断它们是否是等价表示. 此外，由于在任何情况下，一个表示的特征标的标积总是正整数，因此可以在实际工作中以得到的特征标的标积是否确是正整数作为检验处理过程是否有错误的手段之一.

3. 共轭类与特征标

共轭类的特征标性质在群表示的分析中是很有用的，主要有以下性质：

(1) 共轭元素的表示的特征标相同.

(2) 所有不可约表示特征标的总集在定义在共轭元素类上的函数空间中是完备的.

(3) 不同不可约表示的个数等于该群共轭元素类的个数.

(4) 由上面性质可以导出特征标的共轭类正交关系

$$\sum_{j=1}^{q} \chi^{(j)*}(K_i)\chi^{(j)}(K_k) = \frac{N}{n_i}\delta_{ik},$$

其中 q 是该群所有不可约表示的数目，n_i 是第 i 类中元素的个数，K_i 为第 i 类中的一个元素.

从上面的讨论中可以看到，如果给定一个群，首先看其阶数和

共轭元素类的数目．若有限群阶为 N，共轭类的数目为 q，则其不等价的不可约表示一共有 q 个，若第 l 个的维数为 n_l，还应满足

$$\sum_{l=1}^{q} n_l^2 = N,$$

这样实际上对群的不等价不可约表示的分布给出了相当多的信息，在实际分析中是很有用的。

第二章　李群和李代数

§2.1　矩　阵　群

1. 矩阵运算的一些规则

在群的研究，特别是李群及其表示的研究中，经常要用到矩阵作为工具．下面我们把某些重要的运算规则扼要介绍一下．除特别注明者外，所提到的矩阵都是指 $n\times n$ 矩阵，至于矩阵的阶 n 可以是任意正整数，如果写出两个矩阵 A 和 B 相乘时，自然表明 A 和 B 的阶数相同；如果写出 A^{-1} 时，自动表明 $\det A\neq 0$ 以保证 A^{-1} 存在．下面介绍的部分运算规则可以推广到无穷维矩阵的情形．

(1) 矩阵乘法的子矩阵表达式

当求矩阵乘积 AB 时，可以通过 A 和 B 的子矩阵给出．将 A 的 n 行分成几组，每组行数按 l_i 标记，$\sum\limits_i l_i=n$．将 A 的 n 列也分成几组，每组的列数为 m_i，$\sum\limits_i m_i=n$．同样地将 B 的 n 行按 m_i 分组，将 B 的 n 列按 l_i 分组．这样 A 和 B 分别都通过子矩阵 A_{jk}，B_{jk} 表出，但这样并不要求各子矩阵都是方阵．这样 AB 也可表为子矩阵的形式，其表达式与通常矩阵乘法一致：

$$(AB)_{ik}=\sum_j A_{ij}B_{jk},$$

其中 A_{ij} 是 A 的一个子矩阵，其位置为按上述分法的第 i 行 j 列，B_{jk} 也有类似的含意．

这个公式在实际作矩阵运算时有时很有用，特别是在按子群

表述出能反映某种对称性的时候，采用这种作法能更直接体现这种对称性的特点和后果。

(2) 矩阵幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

在其收敛时定义了一个函数$F(A)$. 由于A和A自身的任何次幂都是对易的，因此可以对矩阵函数$F(A)$形式上作微分运算，从而可以将 Taylor 展开公式形式上推广过来，这些运算的规则和结果都和普通数学分析中相同。

关键的问题是如何判断矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的"收敛半径"，亦即在矩阵$A$满足什么条件的范围内$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$是收敛的，从而定义了一个矩阵函数。

定理：如果幂级数$\sum_k a_k x^k$的收敛半径为R，即在$x<R$时级数绝对收敛，而矩阵元素A_{ij}绝对值的上界为a，则当$a<\frac{1}{n}R$时，矩阵幂级数$\sum_k a_k A^k$绝对收敛并且定义了一个矩阵函数。

证明：考察A^k的元素$(A^k)_{ij}$绝对值的上界：

$$\begin{aligned}
|(A^k)_{ij}| &= \left|\sum_l (A^{k-1})_{il} A_{lj}\right| \\
&\leqslant \sum_l |(A^{k-1})_{il}|\,|A_{lj}| \\
&\leqslant na|(A^{k-1})_{ij}| \\
&\leqslant \frac{1}{n}(na)^k < \frac{1}{n}R^k,
\end{aligned}$$

因此矩阵幂级数$\sum_k a_k A^k$的ij分量$\sum_k a_k(A^k)_{ij}$与级数$\frac{1}{n}$

$\cdot\sum_k a_k x^k$比较显然是收敛的.

推论：如果幂级数$\sum_k a_k A^k$的收敛半径为无穷，则矩阵幂级数

$\sum_k a_k A^k$当A_{ij}有限时绝对收敛并定义了一个矩阵A的函数.

根据上述定理和推论，实际上把凡是能通过 Taylor 级数表示的函数，都推广到自变量为矩阵的情形．例如

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,$$

$$\ln(1+A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^{k-1}A^k.$$

但是值得注意的是，有时遇到的矩阵幂级数是通过A的负幂次表现出来，这时要判断级数的收敛性就需要对A^{-1}引用上面定理，即考察A^{-1}的矩阵元的绝对值的上界是否满足上述定理的要求，令$D=\det A$，D_{ij}为A中A_{ij}的代数余子式，则

$$(A^{-1})_{ij}=\frac{1}{D}D_{ij},$$

如果$|D_{ij}|$的上限为a'，则定理中所给条件变为$a'<\frac{|D|}{n}R$时相应的矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_k A^{-k}$绝对收敛并定义了一个矩阵函数.

以后一般提到矩阵函数时都是指能表成矩阵幂级数形式并以此形式定义的函数.

(3) 对易矩阵的函数．如果矩阵A和B是可对易的，即AB

$=BA$，则 A 和 B 的幂级数

$$\sum_{k,l} a_{kl} A^k B^l$$

收敛时，可以用来定义 A 和 B 的一个矩阵函数 $F(A, B)$.

幂级数 $\sum_{k,l} a_{kl} A^k B^l$ 收敛的条件可根据上一节的方法由 $\sum_{k,l} a_{kl} x^k y^l$ 的收敛条件作适当代换得出. 代换的办法如下：若 $|A_{ij}|$ 和 $|B_{ij}|$ 的上界分别为 a 和 b，则如果 $\sum_{k,l} a_{kl} n^{k+l} a^k b^l$ 绝对收敛，则矩阵幂级数 $\sum_{k,l} a_{kl} A^k B^l$ 绝对收敛并定义了 A 和 B 的一个矩阵函数 $F(A, B)$.

由此可以得到推论：如果 $AB=BA$，则 A 和 B 之间的函数关系可以按照通常的函数运算方法进行. 例如

$$e^A e^B = e^{A+B},$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

（4）矩阵函数的相似变换公式

$$BF(A)B^{-1} = F(BAB^{-1}),$$

例如

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}},$$

$$B(\sin A)B^{-1} = \sin(BAB^{-1}).$$

（5）对角矩阵的函数

令 $[A_i]$ 表示对角矩阵元为 A_1，A_2，…，A_n 的对角矩阵. 若 $A=[A_i]$，则

$$F(A) = F([A_i]) = [F(A_i)].$$

例如

$$e^A = [e^{A_i}]$$

$$\sin A = [\sin A_i].$$

(6) 矩阵函数的一些公式

$$(F(A))^{*}=F^{*}(A^{*});$$

$$(\widetilde{F(A)})=F(\tilde{A});$$

$$(F(A))^{+}=F^{*}(A^{+}).$$

(7) 矩阵指数函数的一些公式

$$(e^{A})^{-1}=e^{-A};$$

若 $\tilde{A}+A=0$, 则 $e^{A}e^{\tilde{A}}=1$, 即 e^{A} 为正交矩阵;

若 $A^{+}+A=0$, 则 $e^{A}e^{A^{+}}=1$, 即 e^{A} 为幺正矩阵;

$$\det e^{A}=e^{\operatorname{tr}A}.$$

(8) 普遍公式

$$e^{A}Be^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\cdots$$

这个公式形式上相当于 e^{A} 去乘 B, 只不过凡是 A 对 B 的乘法都理解作对易式. 这个公式在讨论群表示时常用, A 不一定是某一具体矩阵, 完全可以是某抽象算子, 只要 $AB\neq BA$ 就可以用. 这个公式用在群变换的讨论中时, 常将 A 换为 iA, 即

$$e^{iA}Be^{-iA}=B+i[A,B]+\frac{i^{2}}{2!}[A[A,B]]+\cdots.$$

2. 矩阵群及其意义

考虑 n 阶矩阵, 定义乘法为通常矩阵乘法, 显然满足结合律和封闭性, 单位矩阵为单位元素, 只要矩阵的行列式不为零, 就有逆元素存在. 因此考虑全体行列式不为零的 n 阶矩阵, 自然构成一个群, 称为矩阵群.

在实际工作中, 常根据一定的物理需要来构成矩阵群, 这时主要考虑的是如何根据物理需要来规定群元素矩阵要满足的附加条件. 确定了附加条件后, 主要考察它是否和行列式不为零的要求不矛盾, 是否满足封闭性. 如果这两点都没有问题, 则就定义了一

个矩阵群.

矩阵群在研究中所以重要主要是因为:

(1) 所有的群表示都是矩阵群.

(2) 可以在群表示中选取一个忠实表示. 则这个表示与原群同构,可以用这个具体群的研究来代替抽象群的研究.

(3) 矩阵群的乘法规则确定, 用矩阵群的形式来研究群的性质时, 把乘法规则的不同所反映的群的结构的不同改换成体现在群元素的矩阵所满足的附加条件上.

例如 Abel 群和非 Abel 群乘法规则上完全不同,但在用矩阵群的形式表述时,乘法规则可以完全相同,它们的差异就表现在附加条件的不同. 如果考虑对角上没有零的对角矩阵为群元素的条件,则构成的群一定是 Abel 群.

3. GL 群和 SL 群

最普遍的是复普遍线性群, 即群元素为 n 维复空间上的线性变换矩阵,除了矩阵行列式不能为零外,没有附加条件, 这个群记作 $GL(n,C)$. 如果矩阵的矩阵元限制为实数, 则称实普遍线性群, 记作$GL(n,R)$.

如果再加附加条件要求矩阵的行列式为 +1, 则称为复特殊线性群(又称复幺模线性群)$SL(n,C)$ 和实特殊线性群(又称实幺模线性群)$SL(n,R)$.

这几种群的元素中的独立参数个数分别为

$GL(n,C)$	$GL(n,R)$	$SL(n,C)$	$SL(n,R)$
$2n^2$	n^2	$2(n^2-1)$	n^2-1

附加条件增加导致独立参数减少,反映了矩阵受的限制增加,这表现为得到的群是加附加条件前的群的子群. 上述这些群之间的关系为

$$GL(n,C)\supset GL(n,R)\supset SL(n,R),$$

$$GL(n,C) \supset SL(n,C) \supset SL(n,R).$$

如果令C表除0外所有复数对普通乘法构成的群，R表除0外所有实数对普通乘法构成的群，则C和R的独立参数个数分别为2和1. 这时，GL群和SL群的关系又可通过群的直乘表示出来：

$$GL(n,C) = SL(n,C) \times C,$$

$$GL(n,R) = SL(n,R) \times R.$$

4. U群和SU群

如果n维矩阵群的附加条件为矩阵是幺正矩阵，即满足$A^{+} = A^{-1}$，则所构成的群称为幺正群，即U群. 由于幺正条件的限制，$U(n)$群的独立参数共n^2个. 在幺正变换下，n维复空间矢量的内积

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^* z_k$$

保持不变，幺正条件要求$AA^{+} = I$，求行列式$|\det A|^2 = 1$，亦即$\det A = e^{i\alpha}$. 如果再对$U(n)$群加上$\det A = 1$的限制，则称为特殊幺正群（又称幺模幺正群），即SU群，记作$SU(n)$. 这时独立参数为$n^2 - 1$个，减少一个是由于上面的参数α被限定取$\alpha = 0$.

由上面的含意可直接给出

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n,C),$$

此处由$e^{i\alpha}$为元素构成的群是$U(1)$群，它有一个独立参数，利用$U(1)$又可给出

$$U(n) = SU(n) \times U(1).$$

5. O群和SO群

如果n维矩阵的附加条件为矩阵是正交矩阵，即满足$\tilde{A} = A^{-1}$，则称为正交群，即O群. 如果矩阵元可以为复的，则称为复正交群，以$O(n,C)$表示，它有$n(n-1)$个独立参数；如果矩阵元限定为实的，则称为实正交群，以$O(n,R)$表示，它有$n(n-1)/2$个独立参

数. 无论是 $O(n,C)$ 还是 $O(n,R)$ 都是使二次式

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2$$

不变,两者的差别仅在于 Z_k 取复数还是实数.

由 $\tilde{A}A=1$ 得 $(\det A)^2=\pm 1$, 即 $O(n,C)$ 和 $O(n,R)$ 的元素都分成不连通的两个区域, 这两个区域矩阵的行列式分别为 $+1$ 和 -1. 如果再加上附加条件 $\det A=1$, 则得特殊正交群 (又称幺模正交群), 记作 $SO(n,C)$ 和 $SO(n,R)$, 它们分别是 $O(n,C)$ 和 $O(n,R)$ 的子群. 并可记为

$$SO(n)=SL(n)\cap O(n),$$

此式对复数和实数分别都成立. 这里要注意的是幺模条件起的作用是从两个不连通区中选出一个来, 它对描写群元素的连续参数并没直接加限制,因此幺模条件并没有减少独立参数的个数,这是正交群和 U 群不同的地方.

6. Sp 群

考虑 $2n$ 维复空间的矢量 $(x_1,\cdots, x_n,x_1',\cdots,x_n')$ 和 $(y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')$, 如果 $2n$ 维复空间的一个线性变换使双线性型

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k'-x_k' y_k)$$

保持不变,则这些线性变换构成 $2n$ 维复辛群, 记作 $Sp(2n,C)$. 这个群的矩阵 A 具有下述性质

$$\tilde{A}I'=I'A^{-1},$$

其中 $2n$ 维空间 I' 为由 n 维子矩阵构成的下述矩阵:

$$I'=\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

其中 I 为 n 维单位矩阵. 这样 $Sp(2n,C)$ 群的独立参数共 $2n(n+$

1)个. 如果矩阵限制为实矩阵，则为 $Sp(2n,R)$ 只有 $n(2n+1)$ 个独立参数. 通常记作 $Sp(2n)$ 的是幺正辛群，即 $Sp(2n,C)$ 再加上幺正条件，它也是只有 $n(2n+1)$ 个独立参数.

7. $U(n,m)$ 群和 $O(n,m)$ 群

$SO(n,R)$ 群的物理意义是 n 维实欧氏空间的转动群，$O(n,R)$ 则为包括空间反射在内的 n 维实欧氏空间转动群. 在这样的转动下矢量的长度是不变的. $SO(n,C)$ 和 $O(n,C)$ 则是把上述群形式上推广到复空间，但物理意义就不那么明显了. 把欧氏空间转动群的概念较好地推广到复空间的是 U 群和 SU 群，它们相当于 n 维复空间的转动，并保持 n 维复空间内矢量的长度不变.

无论是 $O(n,R)$，$SO(n,R)$，$U(n)$ 或 $SU(n)$ 群，它们保持不变的量都可以描绘为度规为正. 如果推广到度规可以有负数的情形，就得到：

保持 $n+m$ 维空间中矢量 $z_1,\cdots,z_{n+m}$ 所给出的

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^* z_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k^* z_k$$

不变的群称为 $U(n,m)$ 群，再加上幺模条件则为 $SU(n,m)$ 群；保持 $n+m$ 维实空间中矢量 $x_1,\cdots,x_{n+m}$ 所给出的

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k^2$$

不变的群称为 $O(n,m)$，再加上幺模条件则为 $SO(n,m)$ 群. 齐次 Lorentz 群就是 $SO(3,1)$ 群，是已熟知的这类群中的一例.

§2.2 李　群

1. 连通性

现在我们来讨论连续群，一般说来，一个连续群的群元素总可以用 m 个参数来标记. 这 m 个参数分别可在一定范围内变化，参数

取不同值时代表不同的群元素，这些参数通常称为群参数。显然，为了便于研究，群参数的选择通常要求其满足：

群参数与群元素一一对应；单位元素的群参数都为零，群参数连续变化时群元素也连续变化，反之亦然。

在连续群的研究中，连通性是一个很重要的概念，一个群 G 如果具有下述性质则称为弧连通的，或称具有弧连通性。这个性质就是：群的任意元素都能连续地变到单位元素。

这个性质用群参数语言来描述就是：任何群元素所对应的群参数都能连续地经过参数的允许区域而变到零。

例如 $SU(2)$ 群的元素可用参数 $\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3$ 来标记，它们可取任何实数，并且 $\alpha^1=\alpha^2=\alpha^3=0$ 对应单位元素。由于任何一组 $\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3$ 都能连续变到 $0,0,0$，$SU(2)$ 群是一个弧连通群。

$O(n,R)$ 群有 $n(n-1)/2$ 个独立参数，但这些参数给定后仍不能完全确定群元素，因为群元素的行列式还可取 ±1。为了保证群参数与群元素的一一对应，还需要再引入一个参数 β 使群元素的行列式由 $(-1)^\beta$ 给出。这个群参数对于单位元素为零，但它只有两个取值 $\beta=0$ 或 1. 这样 $O(n,R)$ 群实际上有 $\frac{n(n-1)}{2}+1$ 个群参数，它不是弧连通群，因为 $\beta=1$ 的元素不可能连续地变到单位元素。

从上面两个例子可以看到对于连续群的连通性可以如下判断：

(1) 按照上面所讲要求选择描述群元素的群参数；

(2) 检查群参数与群元素是否一一对应，以判断群参数的选取是否充分；

(3) 根据群的性质确定各群参数允许取值的区间和集合；

(4) 群 G 是单连通群的充要条件是所有群参数都是连续参

数，并且其可取值都是在实数轴上的一个连续区间内。

(5) 任何一个群参数是离散型变量或虽然是连续的，但其可取值分布在多于一个分离区间内的群都不是单连通的。

为了描写群的连通性，常用叶来描写，群G中凡能连续地互相变到的元素的集合称为一个叶。单连通群就是叶数为1的群。

如果群G由m个群参数来描写，第i个群参数的可取值由l_i个分离区间所组成(对离散型群参数，每一个分立值算作一个分离区间)，则群G的叶数为$\prod_{i=1}^{m} l_i$。由此也可看到：

连通群的充要条件是$l_i=1, i=1,\cdots,m$。

$O(n)$群的叶数为2，S_3^g群的叶数为6。

由这两个例子也可以看出：如果群G是由群G'和G''直乘或生成的，G''不是连续群，则一般说来G不是连通群。

2. 李群的定义

物理学中用得最多的连续群是李群。关于李群的定义可以有几种互相等价的不同提法。我们并不列举和比较这些提法，而只是以其中取一种几何意义比较直观的来展开讨论。

考虑一个单连通连续群G，它的元素可以用m个连续群参数一一对应地描写，并且群元素的连续性和群参数的连续性互相对应。在这个前提下，群元素的乘法规则$g(\alpha)g(\beta)=g(\gamma)$可以通过群参数$\alpha,\beta$和$\gamma$的函数关系体现出来：

$$\gamma=F(\alpha,\beta).$$

体现出来。

如果单位元素对应的参数为0，$g(\alpha)^{-1}=g(\alpha')$，则群的乘法规则要求：

$$F(0,0)=0;$$

$$F(\alpha,0)=F(0,\alpha)=\alpha;$$

$$F(\alpha,\alpha^{1})=F(\alpha^{1},\alpha)=0;$$
$$F(\alpha,F(\beta,\gamma))=F(F(\alpha,\beta),\gamma).$$

当 $F(\alpha,\beta)$ 对于 α 和 β 是连续可微函数，则 G 称为一个李群.

关于函数 F 还有一些性质:

(1) 当 α,β 是小量时，$F(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$;

(2) 当 α 是小量时，$\alpha^{1}=-\alpha$.

现在对李群的元素作一般的讨论. 考虑李群的一个元素 $g(\alpha)$，α 代表 m 个连续群参数的集合，$\alpha=0$ 代表单位元素. 如果 α 很小，$g(\alpha)$ 很接近单位元，可在单位元附近作 Taylor 展开:

$$g(\alpha)=g(0)+\alpha^{i}\frac{\partial g}{\partial\alpha^{i}}\bigg|_{\alpha^{i}=0}+\cdots\cdots$$

这里用张量符号略去了对 i 求和，引入符号

$$X_{i}=\frac{\partial g}{\partial\alpha_{i}}\bigg|_{\alpha_{i}=0}$$

称为群的无穷小算符或生成元，它是群元素在单位元附近对群参数 α^{i} 的导数，其个数也是 m. 注意生成元 X_{i} 与群元素无关，它反映群的性质. 在物理学的研究中，为了和物理现象直接联系，常常引入

$$I_{i}=-iX_{i}$$

称为生成元. 因此在遇到生成元时，要注意是在什么意义下来使用这概念的. 在下面的讨论中，两种方法我们都要用到，但在符号上通过 X_{i} 和 I_{i} 加以区分，可以避免误解.

如果 α 足够小，则 $g(\alpha)$ 可以只取到 α 一级项而表为

$$g(\alpha)=g(0)+\alpha^{i}X_{i}.$$

现在考虑若群参数 β 不是很小时，$g(\beta)$ 的表达式. 取一个足够大的正整数 n，使 $\alpha^{i}=\frac{1}{n}\beta^{i}$ 足够小，则对 $g(\alpha)=g\left(\frac{1}{n}\beta\right)$ 可以用上述表达式. 将这个群元素重复作用 n 次，得

$$g(\beta)=\left(g\left(\frac{1}{n}\beta\right)\right)^n=\left(g(0)+\frac{1}{n}\beta^i X_i\right)^n,$$

令 $n\to\infty$ 注意到 $g(0)$是单位元，并且 $\beta^i X_i$ 总是和自己对易的，因此得

$$g(\beta)=e^{\beta^i X_i}=e^{i\beta^i I_i},$$

这就是李群的元素通过生成元和群参数的表述.

要强调的是，在上面的推导中，并没有要求当 α 和 β 有限时，$g(\alpha)g(\beta)=g(\alpha+\beta)$，因为如果假定这式子成立就相当于要求群 G 是 Abel 群. 事实上在上面的推导中，只涉及一组群参数 β，只不过把 $\beta^i X_i$ 分成相等的 n 等分加起来. 在这个分的过程中，实际上可变的参数只有一个，β 的各分量 β^i 按同样比例在放大缩小，这时实际上相当于考虑一个单参量的子群，利用它来导出上述表达式.

由上面的表达式也可以看出，不同李群的区别集中表现为生成元的性质和数目. 生成元的数目即群参数的数目，称为群的维数. 现在需要看生成元的性质的差别如何体现出来，并且要考察怎样体现就充分了.

如果群 G 是 Abel 群，即所有元素都是可交换的，从上面的表达式看出来，显然要求所有生成元都是可交换的，这样 G 就可以分解为 m 个单参数李群的直乘，并且很容易处理了. 需要研究的是群 G 不是 Abel 群的情形，并且从 Abel 群的对比中可以估计到群的特性将通过各生成元的不可对易性质反映出来. 因此需要找一个能典型体现非 Abel 特点的群运算来研究.

考虑 $(g(\alpha))^{-1}g(\alpha)=g(0)$ 是显然的，需要找一个过程能区别群是否是非 Abel 群. 最简单的是

$$(g(\alpha))^{-1}(g(\beta))^{-1}g(\alpha)g(\beta),$$

当然 G 是 Abel 群时，它等于单位元素 $g(0)$，但当群 G 不是 Abel

群时，它就可能不再回到单位元素了.

利用上面群元素的表达式，并注意到$(g(\alpha))^{-1}=g(-\alpha)$，上式可以写作

$$e^{-X_\alpha}e^{-X_\beta}e^{X_\alpha}e^{X_\beta},$$

其中 $X_\alpha=\alpha^i X_i$，$X_\beta=\beta^i X_i$，将指数函数的级数形式代入后展开得

$$1+[X_\alpha,X_\beta]+\cdots\cdots,$$

这里 1 代表单位元素，$[X_\alpha,X_\beta]=X_\alpha X_\beta-X_\beta X_\alpha$. 从这个结果来看，如果 G 是 Abel 群要求$[X_\alpha,X_\beta]=0$，由于α 和β 任意，实际上即要求所有生成元都可交换. 如果群G 是非 Abel 群，则应反映在$[X_\alpha,X_\beta]\neq 0$ 上，即至少有一部分生成元之间是不可交换的. 重要的是上面的结果还应是群的一个元素 $g(\gamma)$，它应表现为

$$e^{X_\gamma}=1+X_\gamma+\cdots\cdots,$$

比较两式要求$[X_\alpha,X_\beta]=X_\gamma$，即

$$\alpha^i\beta^j[X_i,X_j]=\gamma^k X_k.$$

这表明应有：

$$[X_i,X_j]=C_{ij}^k X_k,$$

$$\alpha^i\beta^j C_{ij}^k=\gamma^k.$$

其中 C_{ij}^k 是与群参数无关的常数，称为李群 G 的结构常数. 后一式给出群参数γ 由α 和β 决定的关系，如果β 在参数空间中为平行于α 的矢量，则 $\gamma=0$，这在数学上也是合理的.

生成元之间的交换代数关系刻画了群的性质，并且这个描写是充分的，我们不作一般的讨论和证明，但给出一些说明. 考虑更复杂些的反映群的特征的变换，例如

$$(g(\alpha))^{-1}(g(\beta))^{-1}(g(\gamma))^{-1}g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$$

可以化为

$$(g(\alpha))^{-1}(g(\gamma)g(\beta))^{-1}g(\alpha)(g(\gamma)g(\beta))(g(\beta))^{-1}$$
$$\cdot(g(\gamma))^{-1}g(\beta)g(\gamma).$$

这样实际上为上面讨论的情形重复两次而已，并没给出新的要求或限制.

结构常数 C_{ij}^k 有一些基本性质:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k,$$

$$C_{ij}^l C_{kl}^m + C_{jk}^l C_{il}^m + C_{ki}^l C_{jl}^m = 0.$$

这后一式是由于生成元要满足 Jacobi 恒等式:

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0.$$

生成元的对易关系如果通过 I_i 表出则为

$$[I_i, I_j] = -iC_{ij}^k I_k.$$

3. 李代数的定义

李代数和李群的概念密切相关，但并不完全等同. 李群的许多性质可以直接通过李代数简捷地讨论得知.

如果在数域 F 上有一个 m 维矢量空间 A，在 A 上定义了任何一对矢量 X, Y 的运算 $Z=[X, Y]$ 给出一个矢量，并且这运算满足以下性质:

线性 $[aX+bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,

反对称 $[X, Y] = -[Y, X]$,

Jacobi 恒等式 $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

其中 a, b 是 F 中的数，X, Y, Z 为 A 中的矢量. 在这种情况下，称为一个李代数.

注意，这里说到 m 维矢量空间即是指只有 m 个独立的矢量，如果有更多的矢量，这些矢量都能表成它们的线性组合；另外，李代数的本身并不要求 $[X, Y] = XY - YX$，只要求 $[X, Y]$ 满足上面所说的线性、反对称和 Jacobi 恒等式这三个基本性质；实际上通过这运算由 $[X, Y]$ 给出 Z 时，可能还会有常数系数，这系数应是域 F 中的数. 根据 F 是实数域还是复数域决定李代数是实的还是复的.

按照这样的概念，李群生成元之间的对易关系，符合李代数的

全部要求，立即构成一个李代数，实际上李群对应的李代数是实李代数.

4. 李群和李代数的关系

李群的元素可通过生成元表示出来，生成元的对易关系构成一个反映李群性质的李代数. 这个对应是唯一的，但这不等于确定的李代数就对应一个确定的李群，并描写了李群全部性质.

事实上，当我们由李群的性质归结到生成元的对易式时，考虑的是一个运算回路，即由单位元素经几次运算又转回去的总效果，这还是主要反映了连续群的局部性质. 因此生成元的对易式确定的是李群的局部性质，换言之，李代数确定了就决定了李群的局部性质. 如果有两个或多个群，尽管整体性质不同，但局部性质和结构相同，则它们就对应相同的李代数. 这方面的典型例子就是 $SU(2)$群和 $SO(3)$群，它们的李代数完全相同，从局部来看它们性质和结构相同，但从整体上说并不同构.

然而李群的许多性质还是直接从李代数上反映出来，在下面具体讨论各性质时再介绍.

§ 2.3 李 代 数

1. 同态和同构

如果有两个李代数 A 和 A'，有一个对应关系使 A 中每一个矢量 X 对应于 A' 中的一个矢量 X'，并且使 A 中的 $aX+bY$ 对应于 A' 中的 $aX'+bY'$，$[X,Y]$对应于$[X',Y']$，则称李代数 A 与 A' 同态. 如果这个对应关系是一一对应，则称为同构.

如果两个李群的结构常数相同，则这两个李群对应的李代数是同构的. 但是要注意的是，如果已知两个李群所对应的李代数同构，并不能推论说这两个李群一定同构，而只能得出这两个李群局部同构，当然同构的区域应包括单位元素. 例如 $SU(2)$群和

$SO(3)$群所对应的李代数是完全相同的，但它们是局部同构而非整体同构. 又例如一维空间平移群和绕固定轴转动群都是用一个群参数描写的 Abel 群，它们的李代数是相同的，这两个群是局部同构的，但不能说是整体同构的. 事实上，绕固定轴转动具有周期性，但平移并没有周期性，这两者显然没有整体同构性.

李代数间的同构决定了相应的李群之间是局部同构，这个结果来源于李代数直接决定的李群性质是局部性质，这可以从李群中导出相应的李代数的过程中明显看出，当时只牵涉到李群的局部性质.

2. 伴随表示

对于李代数 A，令 $X, Z\in A$，即 X，Z 为 A 中的矢量. 考虑用矢量 X 对 Z 进行某种线性变换，使得

$$\mathrm{ad}XZ=[X,Z],$$

对于不同的 Z 来说，$\mathrm{ad}X$ 也不同. Z 一共有 m 个可能的独立取法（因李代数 A 构成一个 m 维矢量空间），所对应的 $\mathrm{ad}X$ 的变换效果合起来可以用一个 $m\times m$ 矩阵来描写，仍记作 $\mathrm{ad}X$. 对李代数中每个 X 都找出相应的 $\mathrm{ad}X$，这 m 个 $\mathrm{ad}X$ 构成李代数 A 的一个伴随表示.

为了给出伴随表示矩阵的明显形式，作

$$(\mathrm{ad}X_i)X_j=[X_i,X_j]=C_{ij}^{k}X_k,$$

这样 C_{ij}^{k} 中 i 是表示 $\mathrm{ad}X_i$ 矩阵，j，k 则是该矩阵的行列指标，这个矩阵是在这 m 维矢量空间中以 X_i 作为基矢给出的.

为了形象地刻划这点，考虑这 m 维矢量空间中的一个任意矢量 Y，它可表为

$$Y=y^jX_j,$$

用 $\mathrm{ad}X_i$ 对 Y 作用，如果所得结果记作 $Z(=z^kX_k)$

$$(\mathrm{ad}X_i)Y=Z,$$

则从上面的关系式中立即得到

$$C_{ij}^{k} y^{j} = z^{k},$$

这正反映了 C_{ij}^{k} 中 j,k 是 $\mathrm{ad}X_i$ 表示矩阵的行列指标. 由此可见, 李群所对应的李代数的伴随表示是 m 维空间的 m 个矩阵, 它完全地由结构常数 C_{ij}^{k} 给出.

3. 子代数,不变子代数(理想子代数)

如果 A' 是李代数 A 的子集,并且若 $X,Y\in A'$, 则$[X,Y]\in A'$, 称 A' 是 A 的子代数.

如果对子代数 A' 中的矢量 $X,Y\in A'$,总有$[X,Y]=0$,则称 A 为 Abel 子代数.

如果子代数 A' 还具有性质: 对于任意 $X\in A'$, $Y\in A$ 都有$[X,Y]\in A'$,则称 A' 为 A 的不变子代数(又称理想子代数).

如果一个李群对应于一个李代数, 则由该李代数的子代数、Abel 子代数或不变子代数为生成元的李群相应地是该李群的子群、Abel 子群或不变子群. 由子李群和李代数的这个联系, 常常可以利用子代数的判断来确定子群, 因为通过代数关系来找寻和判断子代数比直接找寻和判断子群要简单容易得多.

例如,$SU(2)$群的生成元 $I_i=\frac{1}{2}\tau_i$, $i=1,2,3$, τ_i 就是熟知的 Pauli 矩阵. 由于每一个 I_i 和自身的对易式总为零, 这表明 I_1, I_2, I_3 分别都构成一个子代数. 由于这三个子代数分别只有一个矢量,因此显然是 Abel 子代数. 但是由于$[I_i,I_j]=i\epsilon_{ijk}I_k$,这三个子代数都不是不变子代数. 这些结果对应于 I_1, I_2 和 I_3, 但这三个 Abel 子群都不是不变子群.

要强调说明的是, 如上所述子群与子代数的对应关系并不是一一对应的. 因为李群的局部性质完全由相应的李代数体现出来, 反之子李代数也只能体现李群的子李群的性质, 如果李群有一个

子群是离散型的，甚至是有限群，则这个子群显然不对应于任何子代数，从而不可能通过子代数的分析找出来。

例如对于$SU(2)$群，有一个子群，由矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$和$e^{i2\pi I_1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$组成，它是一个阶数为2的有限群，并且是$SU(2)$群的Abel不变子群，但是它的存在不会在相应的李代数中反映出来。

李群的子群和李代数的子代数的对应关系只限于李群的李子群，至于李群的非连续子群则不在相应的李代数的子代数上反映出来。

如果李代数A的不变子代数A'不和A完全相重，则称A'为A的固有不变子代数。

4. 直和和半直和

如果把李代数A分成两部分A_1和A_2，$A_1\cap A_2=0$，A_1和A_2分别构成A的子代数，并且A_1中矢量与A_2中矢量的对易式均为零，则称李代数A为A_1和A_2的直和，记作

$$A=A_1\oplus A_2.$$

上述定义又可用符号表作：如果A可以分为两部分A_1和A_2，$A_1\cap A_2=0$，并且$[A_1,A_1]\subset A_1$，$[A_2,A_2]\subset A_2$，$[A_1,A_2]=0$，则称$A=A_1\oplus A_2$。

直和的物理意义在于：如果李代数A能表成两个不变子代数的直和，则其所对应的李群G也能写成两个对应的不变子群的直乘。因此要判断李群是否能分成两个不变李子群的直乘，只需要简单地判断相应的李代数是否能分成两个不变子代数的直和。

如果李代数A可以分为两部分A_1和A_2，$A_1\cap A_2=0$，并且$[A_1,A_1]\subset A_1$，$[A_2,A_2]\subset A_2$，$[A_1,A_2]\subset A_1$，即A_1是不变子代数，A_2是子代数，则和A能表成A_1与A_2的半直和：

$$A = A_1 \oplus_S A_2.$$

李代数 A 对应的李群 G 相应也有一个不变子群和一个子群，分别与 A_1 和 A_2 对应，并且群 G 可表为由这个不变子群和子群所生成.

§2.4 李代数的基本性质

1. 单纯李代数和半单纯李代数

没有固有不变子代数的李代数称为单纯李代数，没有 Abel 不变子代数的李代数叫半单纯李代数.

半单纯李代数的充要条件：李代数 A 可表为子代数 A_i 的直和

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n,$$

其中 A_i 是 A 的非 Abel 不变子代数，并分别是单纯李代数.

利用这个充要条件可以由李群相应的李代数的性质来判断该李群是否是半单纯李群.

利用李代数是否是单纯李代数或半单纯李代数，来判断相应的李群是否是单纯李群或半单纯李群，是一个简便的判别方法. 但是在使用时必须注意：由于李代数只决定李群的局部连续性质，它不直接涉及整体性质和离散型子群性质，因此由李代数的性质来推断相应的李群性质也只在这个意义下成立.

例如 $SU(2)$ 李代数是单纯李代数，由此可以推断 $SU(2)$ 群没有不变李子群，但是并不能推断 $SU(2)$ 群没有不变子群. 事实上，前面已指出由元素 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 构成的群是 $SU(2)$ 群的一个 Abel 不变子群. 如果沿用群论中关于单纯群和半单纯群的定义，则 $SU(2)$ 群既非单纯群也非半单纯群.

类似的情况对 $SU(n)$ 群都存在，考虑 Z_n 群

$$Z_n: I, e^{i\frac{2\pi}{n}k} I, k = 1, \cdots, n-1,$$

其中 I 表 $n\times n$ 单位矩阵. Z_n 是 $SU(n)$ 群的中心，因此它是 $SU(n)$ 群的 Abel 不变子群，则 $SU(n)$ 群不是单纯群也不是半单纯群.

但是由于 $SU(n)$ 群的子群 Z_n 群是有限群，它的性质并不会在 $SU(n)$ 李代数中反映出来. $SU(n)$ 李代数则仍表现为单纯李代数.

为了保持李群与李代数的对应关系，有时将单纯李群的定义改为没有不变李子群的李群，将半单纯李群的定义改为没有 Abel 不变李子群的李群. 按这样的定义就可以由李代数的单纯或半单纯性质直接推断相应李群的性质. 按这样修改后的定义，$SU(n)$ 群是单纯李群. 两种定义的并存，也带来一定麻烦. 在讨论时要注意，是在哪一种含意下用的，避免误解而带来不必要的混乱.

2. Killing 度规和反对称结构常数

每一个李代数的性质都通过结构常数反映出来. 定义 Killing 度规 g_{ij} 为

$$g_{ij}=g_{ji}=C_{ik}^{l}C_{jl}^{k},$$

它和通常的度规类似，是代表李代数所存在的矢量空间的度规性质，对下标是对称的. 通常度规张量的一个最重要性质是把上指标换成下指标，这里我们引进

$$C_{ijk}=g_{kk'}C_{ij}^{k'},$$

由于它是结构常数与度规收缩而来的，仍然是结构常数，只是指标全部化成了下指标. 利用 Jacobi 恒等式给出

$$C_{ijk}=C_{in}^{m}C_{jl}^{n}C_{km}^{l}-C_{il}^{n}C_{jn}^{m}C_{km}^{l},$$

它对 i,j,k 是完全反对称的，因此称为完全反对称结构常数. 由于 C_{ijk} 具有完全反对称的性质，在对称性的分析中利用 C_{ijk} 比 C_{ij}^{k} 往往更为方便.

要说明的是，我们在讨论李群时，把李群的性质的研究归结为其生成元的李代数的研究，即 $[X_i,\ X_j]=C_{ij}^{k}X_k$ 或 $[I_i,\ I_j]=-iC_{ij}^{k}I_k$. 但这里实际结构常数是以 C_{ij}^{k} 形式出现. 如果希望以

C_{ijk} 形式出现，按指标收缩规则应将 X_k 换成 X^k，这又会带来麻烦．而大量物理文献中常常直接写出$[I_i, I_j]=iC_{ijk}I_k$ 作为生成元满足的李代数关系，不区分上下指标，只指出在一定条件下 C_{ijk} 可保持完全反对称性质．关于这种作法下面还要说明．

3. Cartan 判据

李代数是半单纯李代数的充要条件是

$$\det|g_{ij}|\neq 0.$$

对于半单纯李代数，由于 $\det|g_{ij}|\neq 0$，则由 Killing 度规组成的矩阵$[g_{ij}]$就有逆矩阵存在，记作 g^{ij}．它也是对称矩阵，并具有性质

$$g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k,$$

所以半单纯李代数有上指标 Killing 度规存在，对任何一个张量都可把上指标换成下指标，把下指标换成上指标．

如果对李代数 A 的 m 维矢量空间基底 X_i 作线性变换，变到以 Y_i 为基底

$$Y_i=a_i^jX_j,$$

则以 Y_i 为基底的李代数结构常数也可通过原结构常数变换给出，在后面还要具体讨论这一点．现在要强调的是 g_{ij} 和 g^{ij} 的变换规则分别是

$$g'_{ij}=a_i^{i'}a_j^{j'}g_{i'j'},$$

和

$$g'^{ij}=a^{-1}{}_{i'}^{i}a^{-1}{}_{j'}^{j}g^{i'j'},$$

其中 g'_{ij} 和 g'^{ij} 为以 Y_i 为基底的 Killing 度规．

如果这个李代数对应于一个李群，则这个李代数是实李代数，这样我们总可通过基底的实正交变换将 Killing 度规对角化．如果这李代数是半单纯李代数，则因为 $\det|g_{ij}|\neq 0$，所有对角元素均将不为零．如果这李代数相对应的李群是紧致李群，则如后面

所指出的，其 Killing 度规将为负定的，即对角化后，全是负的非零值．这时再作一个标度变换可将 Killing 度规变为负的单位张量，即非对角元素为零，对角元素为 -1 的张量．

根据上面的讨论可以得到以下结论：对于紧致半单纯李群，则总可以通过适当选取生成元李代数的基使 Killing 度规为负的单位张量，这时完全反对称结构常数可表为

$$C_{ijk}=-C_{ij}^{k},$$

亦即在基下李代数可直接表为

$$[X_i, X_j]=-C_{ijk}X_k,$$

或

$$[I_i, I_j]=iC_{ijk}I_k.$$

事实上，在这情形下，任何张量指标的上下移动都只要变号就得了(因为 g^{ij} 也是对角的负单位张量)．这便是许多文献中直接引用完全反对称结构常数表述的李代数关系作为基本出发点的根据和来源．

4. Casimir 算符

定义：半单纯李代数的二阶 Casimir 算符为

$$C=g^{ij}X_iX_j=X^iX_i.$$

在这个定义式中，Killing 度规使它收缩成一个二次型．

现在看 X_j 的任意线性组合 $X=x^jX_j$，考察

$$\begin{aligned}[C, X] &= g^{ii'}x^j([X_i, X_j]X_{i'}+X_i[X_{i'}, X_j]) \\ &= g^{ii'}x^j(C_{ij}^kX_kX_{i'}+C_{i'j}^kX_iX_k) \\ &= x^jC_{ijk}(X^kX^i+X^iX^k)=0.\end{aligned}$$

这表明 Casimir 算符和所有的 X_j 对易，亦即和所有的群元素对易．也就是说 Casimir 算符在李群变换下是不变的，或者说在李群的变换下是标量．Casimir 算符在李群表示论的研究中非常有用．

如果对半单纯李代数 A 的基底 X_i 作线性变换

$$Y_i = a_i^j X_j,$$

则以 Y_i 为基底时的 Casimir 算符

$$C' = g'^{ij} Y_i Y_j = g^{ij} X_i X_j = C$$

这表明 Casimir 算符不随半单纯李代数基底选择的不同而改变. 这个性质非常重要,它表明在实际处理半单纯李代数问题时,可以根据涉及问题的需要来选择李代数的基底,但得出的 Casimir 算符则是与基底的选择无关的.

对紧致半单纯李群,如前所述,可选适当的李代数的基使 Killing 度规为负单位张量,这时 Casimir 算符可表为

$$C = -X_i X_i = I_i I_i$$

这也是物理学上常用的形式.

以上所说的是二阶 Casimir 算符,还可引入更高阶的 Casimir 算符

$$C_n = C_{i_1 j_1}^{j_2} C_{i_2 j_2}^{j_3} \cdots C_{i_n j_n}^{j_1} X^{i_1} X^{i_2} X^{i_n},$$

它们也和任意生成元都对易,即在群变换下不变. 如果李群的秩为 l,则共有 l 个独立的 Casimir 算符,即 $C_2, C_3, \cdots, C_{l+1}$ 为互相独立的. 例如 $SU(n)$ 群独立的 Casimir 算符为 $C_2, \cdots\cdots, C_n$.

5. 可解李代数幂零李代数

如果 A_1 和 A_2 分别为李代数 A 的不变子代数,则$[A_1, A_2]$也是 A 的不变子代数,并且

$$[A_1, A_2] \subset A_1 \cap A_2,$$

其中$[A_1, A_2]$表示 A_1 中任意矢量与 A_2 中任意矢量作对易式所得结果的集合.

如果 A_1 和 A_2 都取作 A,则

$$A^{(1)} = [A, A] \subset A,$$

$A^{(1)}$ 称为 A 的导出代数,它是 A 的不变子代数. 当然 $A^{(1)}$ 有可能

就是 A，也有可能是 A 的固有不变子代数。

定义 $A^{(k)}$ 为 $A^{(k-1)}$ 的导出代数

$$A^{(k)}=[A^{(k-1)},A^{(k-1)}],$$

这样就得 A 的导出代数链

$$A,A^{(1)},A^{(2)},\cdots\cdots,$$

如果存在某一个 k 值，使 $A^{(k)}=0$，则称 A 为可解李代数.

例如，$SU(2)$李代数由 X_1,X_2,X_3 构成，其任意次导出代数都仍得 $SU(2)$代数自身，所以 $SU(2)$是不可解李代数.

如果我们把$[A,A]$记作 A^2，并引入

$$A^3=[A,A^2],$$

$$\vdots$$

$$A^k=[A,A^{k-1}].$$

如果存在某一 k 值，使 $A^k=0$，则称 A 为幂零李代数.

注意关于可解李代数和幂零李代数有下述性质：

(1) 幂零李代数一定是可解李代数，但可解李代数不一定是幂零李代数；

(2) 若 A 是可解李代数，则 A 的子代数或同态映象也是可解李代数；

(3) 若 A 是幂零李代数，则 A 的子代数或同态映象也是幂零李代数；

(4) 可解李代数和幂零李代数都不是单纯李代数或半单纯李代数；

(5) 任何李代数 A 都可写作一个可解李代数 P 和一个半单纯李代数 S 的半直和

$$A=P\oplus_S S.$$

6. 紧致李群和非紧致李群

关于这个概念有几种不同的定义，我们这里给出两种简单的、

直观的定义.

如果对于定义在群参数α的全部可取值区间上的连续函数都有界，则称这个李群为紧致的，否则就称为非紧致的.

另一种定义为：如果李群群参数α可取值的区间是由有限个闭区间所组成，则称为紧致的，否则就称为非紧致的.

不难证明这两个定义的等价性. 由于这两种定义的直观性，可以比较方便地用来作紧致性的判据.

由于紧致李群的群参数变化区间必须是闭区间，因此凡是群参数可取值区间是开区间的就不是紧致的. 按这样分析，如果某群参数可取值为一切实数值，因为它是一个开区间，就不是紧致群. 但是要注意，如果它对群参数的变化是周期性的，则形式上是一切实数值所组成的开区间，实际是有限闭区间的重复. 例如二维平面的转动，虽然转角可以取任意实数值，实际上只是0到2π闭区间的重复，因此二维转动群是紧致群. 但是Lorentz群则是非紧致群.

与紧致群相联系的一个很重要的概念是群积分，我们下面作一些讨论.

设有一个群函数$\Phi(g)$，自变量g可取为群的各元素. 对离散群的情形，可以用k来标记群元素，对$\Phi(g)$的所有分量求和

$$\Phi=\sum_k \Phi(g_k).$$

如果作群的某种变换，即用某一确定的群元素g_i去乘$\Phi(g_k)$中的g_k，则g_k变为$g_{k'}$，但整个求和仍是对所有群元素求和，亦即Φ在群变换下是不变的.

在连续群的情况下，人们自然地想到把求和推广为积分，得

$$\Phi=\int\phi(\alpha)d\alpha,$$

但是这样简单的推广是不对的，它不能保证Φ在群变换下的不变性。事实上，如果我们用$g(\beta)$去变换，$g(\beta)g(\alpha)=g(\gamma)$，其中$\gamma$与$\beta,\alpha$的关系为$\gamma=F(\beta,\alpha)$，这样经$g(\beta)$变换后，$\Phi$变为

$$\Phi'=\int\phi(\gamma)d\alpha=\int\phi(\gamma)\frac{d\alpha}{d\gamma}d\gamma,$$

γ和α的变化区间相同，都是在群参数的整个允许区间上变化。但Φ'中出现了因子

$$\frac{d\alpha}{d\gamma}=\left(\frac{dF(\beta,\alpha)}{d\alpha}\right)^{-1},$$

如果它不恒等于1，则Φ'不和Φ相同。

要想保证Φ'和Φ仍然相等，就需要引入一个权重因子$f(\alpha)$，使积分变量变到γ时自动有

$$f(\alpha)d\alpha=f(\gamma)d\gamma,$$

将$\gamma=F(\beta,\alpha)$代入，即要找寻$f(\alpha)$满足

$$f(\alpha)=f(F(\beta,\alpha))\frac{dF(\beta,\alpha)}{d\alpha},$$

这时群积分

$$\Phi=\int\phi(\alpha)f(\alpha)d\alpha$$

在群变换下保持不变。

原则上，给定李群后要找寻群积分的权重因子是极其繁杂的。但是在具体问题中，可以根据具体群的物理意义和几何意义，设法直接找出其表达式，而且往往比较容易。下面我们看几个例子。

如果李群是Abel群，则总可适当选择群参数，使$F(\beta,\alpha)=\beta+\alpha$，这时权重因子简单为$f=1$。

例如，绕固定轴转动$SO(2)$群，它是Abel群，群参数选作转角θ，则有$F(\theta_2,\theta_1)=\theta_2+\theta_1$。因此群积分的不变积分元就是$d\theta$。

例如，一维空间和一维时间的Lorentz变换$SO(1,1)$群，它

为 Abel 群，但是是非紧致群．我们不去讨论非紧致性带来的群积分收敛条件问题，而着重讨论其不变积分元．

如果选速度 v 为群参数，则

$$g(v)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\end{pmatrix},$$

这样由于

$$g(v')g(v)=g\left(\frac{v'+v}{1+v'v}\right),$$

找出权重因子以确定不变群积分元相当困难．但如选取快度 Y 代替速度作为群参数：

$$g(v)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}Y & \mathrm{sh}Y\\ \mathrm{sh}Y & \mathrm{ch}Y\end{pmatrix},$$

则

$$g(Y')g(Y)=g(Y'+Y),$$

这样立刻得不变群积分元就是 dY．实际上通过群参数 v 给出的不变群积分元就是将 $Y=\mathrm{arc\,sh}(v/\sqrt{1-v^2})$ 代入 dY 中得到的．

在非 Abel 群的情形，难以选择群参数使 $F(\beta,\alpha)=\beta+\alpha$，这时要着重考察其物理意义和几何意义，以找出合适的不变群积分元．

例如三维空间的转动群 $SO(3)$，其群参数可以用 Enler 角 θ，φ，ψ．其几何意义是 θ 和 φ 确定空间转轴方向，而 ψ 则是绕转轴转动的转角．由于 θ 和 φ 相当于球坐标下确定空间的方向，其不变积分元应为 $\sin\theta d\theta d\varphi$，$\psi$ 的不变积分元显然是 $d\psi$，因此 $SO(3)$ 群的不变群积分元为 $\sin\theta d\theta d\varphi d\psi$．

由以上例子可以看出，针对具体的群确定不变群积分元的形式，很重要的是靠对该群的物理意义和几何意义的理解，从这方面入手实际上有时比单纯从数学上普遍推导要简捷得多．

第三章　李代数的结构与分类

§ 3.1　复半单纯李代数的标准形式

如果 A 是一个 m 维李代数，则 A 的 m 个矢量构成这个 m 维矢量空间的完备基，即这空间中任意矢量都可表成它们的线性组合．李代数 A 的性质由代数关系、即结构常数所决定．互相同构的李代数有相同的结构常数，但是否结构不同的李代数就没有联系呢？答案是：不一定．

考虑 m 维矢量空间作基底的线性变换，将原基底 X_i 重新组成 Y_i，将 A 的代数关系通过 Y_i 重新写出来．如果 X_i 的代数关系

$$[X_i, X_j]=C_{ij}^k X_k,$$

引入变换 $Y_i=a_i^j X_j$，则 Y_i 的代数关系为

$$\begin{aligned}[Y_i, Y_j]&=a_i^{i'} a_j^{j'} [X_{i'}, X_{j'}]\\ &=a_i^{i'} a_j^{j'} C_{i'j'}^{k'} X_{k'}\\ &=a_i^{i'} a_j^{j'} C_{i'j'}^{k'} (a^{-1})_{k'}^k Y_k.\end{aligned}$$

由此可见，代数 A 通过 Y_i 表出时，其结构常数变为 $C_{ij}'^k=a_i^{i'} a_j^{j'} (a^{-1})_{k'}^k C_{i'j'}^{k'}$．它显然可能和原来的结构常数完全不同．然而它却是由原来的结构常数交换而来的．另一方面，这实际上是同一个代数 A 在不同基下的表述．因此就需要寻找一种方法，能摆脱基的选择的不同而带来的表面上的复杂性而直接研究清楚李代数的结构性质．

例如 $SU(2)$ 群和 $SO(3)$ 群的对应的李代数是相同的，表现为 $[I_i, I_j]=i\epsilon_{ijk}I_k$，采用 I_1, I_2, I_3 来表达时，它们的物理意义即角

动量(或同位旋)的三个投影. 但有时它们的代数关系又通过 I_+、I_-, I_3 来表述,这时的结构常数就完全不同了. 群元素通过两种基底都可以表述,并且采用的独立群参数都是 3 个,但具体表述方式还是有所不同.

要能直接反映李代数结构性质可以采用标准形式. 若李代数 A 由 m 个矢量 X_i, $i=1,\cdots\cdots,m$ 来实现,考虑这矢量空间任意矢量 B,它总可通过 X_i 表为

$$B=b^iX_i,$$

其中 b^i 为常数, B 的任意性反映为 b^i 的任意性. 现在暂时取定 B,对于 A 中任意矢量 $X=x^iX_i$,可以把$[B, X]$看作是 B 对 X 的变换. 这个变换是线性的,变换结果仍是 A 中的矢量. 把 B 作为线性算符,考察本征值方程

$$[B, X]=\rho X$$

的解是否存在以及本征值 ρ 和本征矢量 X 的分布情况. 利用李代数关系上式给出

$$b^ix^jC_{ij}^k=\rho x^k,$$

即求矩阵 $b^iC_{ij}^k$(行列指标为 j,k)的本征值和本征矢量的问题. 本征值由方程

$$\det|b^iC_{ij}^k-\rho\delta_j^k|=0$$

决定.

然而 b^i 是任意的, 因此选取不同的 b_i 就得到完全不同的本征值分布. 显然,本征值不会多于 m 个, 但其中却可能有重根. 让 b^i 变化以使尽可能多的根不是重根,即尽可能得到最大数目的不同根. Cartan 证明了对于半单纯李代数,这样作的结果是只有 $\rho=0$ 是重根.

如果 $\rho=0$ 的简并度为 l, l 称为半单纯李代数的秩, 对应于本征值的 l 个互相独立的本征矢量,记作 H_i(当然它们也是由 X_i

组合给出的)，满足

$$[B, H_i]=0, \ i=1, \cdots\cdots, l,$$

其余 $m-l$ 个本征矢量为 E_α，对应本征值为 α

$$[B, E_\alpha]=\alpha E_\alpha.$$

由于 $[B,[H_i,E_\alpha]]=\alpha[H_i,E_\alpha]$，并且非零本征值不简并，得到

$$[H_i, E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha,$$

即

$$C_{i\alpha}^{\beta}=\alpha_i \delta_\alpha^\beta,$$

利用 Jacobi 恒等式可证

$$[B,[H_i,H_j]]=0,$$

因此得

$$[H_i, H_j]=C_{ij}^k H_k.$$

将 B 用 H_i 和 E_α 展开，代入 $[B,H_i]=0$，立刻得 B 将只含 H_i，可表为

$$B=\lambda^i H_i$$

并定出 $\alpha=\lambda^i\alpha_i$。再利用 Jacobi 恒等式于 $[B,[E_\alpha,E_\beta]]$ 得

$$[B,[E_\alpha,E_\beta]]=(\alpha+\beta)[E_\alpha,E_\beta],$$

由此得

$$[E_\alpha, E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},$$

即

$$C_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta}=N_{\alpha\beta}, \quad \alpha+\beta\neq 0,$$

和

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=C_\alpha^i H_i,$$

在上式中，若 $\alpha+\beta$ 不是根时则 $N_{\alpha\beta}=0$。

根据上式给出 Killing 度规，利用半单纯李代数的 Cartan 判据要求度规的行列式不为零。这就导致如下定理：

半单纯李代数若有一个非零的根 α，则 $-\alpha$ 也是一个根。

通过归一化 E_α 可将度规表为

$$
g_{\lambda\mu}=\left(\begin{array}{c|cccccc}
g_{ij} & & & & & & \\
\hline
 & 0 & 1 & & & & \\
 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

从而得出

$$g_{ij}=\sum_{\alpha}\alpha_i\alpha_j,$$

最后整理成

$$[H_i, H_j]=0,\ i,j=1\cdots\cdots l,$$

$$[H_i, E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha,$$

$$[E_\alpha, E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},\ (\text{如}\ \alpha+\beta\neq 0),$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=\alpha^i H_i.$$

这就是李代数的标准形式，又称 Cartan-Weyl 基. 其中 H_i 构成一个 Abel 子代数，常被称为 Cartan 子代数，并且是半单纯李代数的最大 Abel 子代数.

§3.2 根和根图

1. 根及其基本性质

在 Cartan-Weyl 基中，所有的矢量都可用它对 B 的本征值(即根)来标志. 根的大小只有相对的意义，因为实际上 B 可表为 $B=\lambda^i H_i$，而根 α 可表为 $\alpha=\lambda^i\alpha_i$，它取决于 λ^i 的大小. 但是重要的是每一个根 α 实际上是由一个 l 维空间的矢量 α_i 所决定，α_i 与

α 不同点在于它并不随 λ^i 的标度变化而变化。引入 l 维空间矢量 α_i，β_i 的内积，记为 $(\alpha,\beta)\equiv\alpha^i\beta_i$，显然内积也不随 λ 的标度变化。

根的基本性质可归纳如下：

(1) 如 α 和 β 是根，则 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ 是整数，并且 $\beta-\frac{2\alpha(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ 也是一个根。

(2) 如 α 是根，则 α 的倍数中只有 $\alpha, 0, -\alpha$ 是根。

(3) 如 α,β 是根，则存在一个根链

$$\beta+j\alpha, \beta+(j-1)\alpha, \cdots\cdots, \beta-k\alpha,$$

这个链上包含最多 4 个根；因此只能有

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=0, \pm1, \pm2, \pm3.$$

2. Cartan-Weyl 正规化

Cartan-Weyl 标准基中还有 $N_{\alpha\beta}$ 有待确定。这里涉及 $N_{\alpha\beta}$ 的数值确定和位相选择。利用 $N_{\alpha\beta}$ 的反对称性给出 $N_{\alpha\beta}$ 位相合适的选择按下式进行：

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{\beta,\alpha}=-N_{-\alpha,-\beta}=N_{-\beta,-\alpha}$$

其数值由下式确定：

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}=\frac{j(k+1)(\alpha,\alpha)}{2},$$

其中 j,k 是由根链

$$\beta+j\alpha, \beta+(j-1)\alpha, \cdots, \beta, \cdots, \beta-k\alpha,$$

决定。

由上式可以预计 $N_{\alpha,\beta}$ 可表为 (α,α) 和 j,k 的函数，记作

$$N_{\alpha,\beta}=f(j,k,(\alpha,\alpha)),$$

则对 $N_{-\alpha,\alpha+\beta}$ 来说，相当于 $\beta\to\beta+\alpha, \alpha\to-\alpha$，这在根链中相当 $k\to j-1, j\to k+1$，

$$N_{-\alpha, \alpha+\beta}=f(k-1, j-1, (\alpha, \alpha)).$$

3. 根的图表示

根实际上是反映了 l 维空间里的一个矢量，其协变分量为 α_i，这个 l 维空间称权空间. 可以把根矢量在 l 维权空间中划出来，用这个图来反映李代数的性质和结构.

已知根矢量性质为:

如 α 为一根，则 $-\alpha$ 也是一个根;

如 α, β 为根，则 $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ 为一整数，绝对值不大于 3. 既然如此

$$\frac{4(\alpha\beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}=0, 1, 2, 3, \cdots,$$

但同时它又不能超过 4，因此有

$$\cos^2\varphi=0, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}, \ 1.$$

由于 α 和 $-\alpha$ 都是根，总可只考虑 $\cos\varphi\geqslant 0$ 的情形，即 $\varphi=0°$, 30°, 45°, 60°, 90°. 如 α, β 为根,

$$\beta-2\alpha\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

也是根. 根据这些可得出下表. 为简便起见，我们把长度长的根称为 β:

φ	0°	30°	45°	60°	90°
$\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$	1	2	2	1	不定

根据上表，就可以很方便刻划出李代数的结构.

对 $l=1$，是直线上的图，只有两个非零根，一个零根.

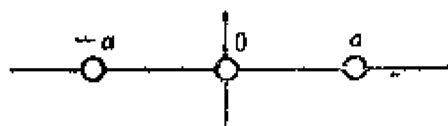


图 3.1 $l=1$ 的群的根图

对 $l=2$，是平面上的图，有两个零根，其余为非零根．我们考虑两根中夹角最小值为$\varphi_{\min}$($\varphi_{\min}>0$，因$\varphi=0$是显然最小的，但无特殊意义)，从 $\varphi_{\min}=30°，45°，60°，90°$出发，可以推得 $l=2$ 时，所有可能允许的根图．

例如对 $\varphi_{\min}=30°$ 情形，从任一根出发，与之夹角为 30° 处有另一根，其长度应差$\sqrt{3}$倍，这样为确定起见，令前者为短根 α，后者为长根 β，则 $-\alpha$，$-\beta$ 也是根．根据上面的规则，$\pm(\beta-2\alpha)$和$\pm(\alpha-\beta)$也是根．继续这样的讨论，得出 $\varphi_{\min}=30°$ 的根图唯一地如下图，这个群称为 G_2 群．同样的作法也可对 $\varphi_{\min}=45°$，

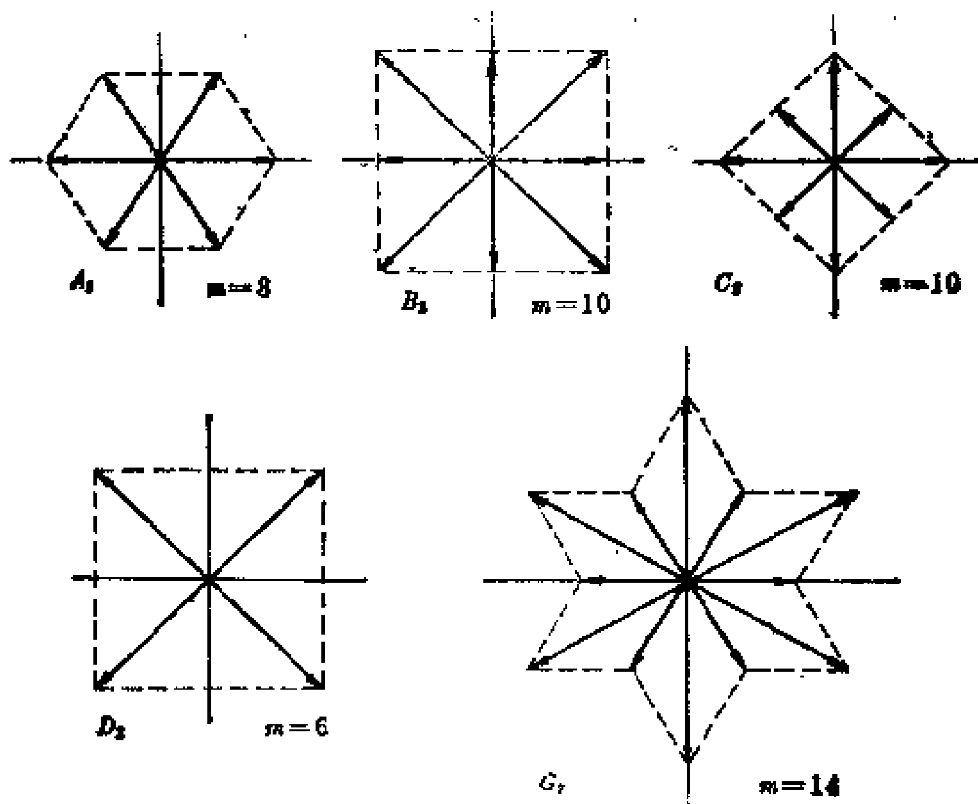


图 3.2 $l=2$ 时所有可能的根图

60° 和 90° 进行，$\varphi_{\min}=45°$ 得到的是两个同构的根图 B_2 和 C_2，$\varphi_{\min}=60°$得到的是 A_2 群，$\varphi_{\min}=90°$得到的是 D_2 群. 这些群的根图及群的维数 m(即根的数目)如图 3.2 所示.

$l=2$ 的根图一共只有这几种. 实际上，由根图对原点的对称性以及沿任何方向的根最多只有一对的限制，就使根图不可能取更为复杂的形式.

对于 $l>2$ 的情形，虽然原则上也能给出根图，但这些图是在 l 维空间内，实际上很难具体地给出. 因此在 $l>2$ 的情形中，重要的是直接给出在 l 维空间中根的矢量表述.

§3.3 单纯李代数的分类

1. 单纯李代数的分类

所有的单纯李代数已经作了系统的研究，它们可以归为 4 个经典李代数序列和 5 个例外李代数. 相应的李群也就是 4 个经典李群序列和 5 个例外李群. 在标记时通常把李代数的秩标作下标.

四个序列是

$$A_l \equiv SU(l+1),$$
$$B_l \equiv SO(2l+1),$$
$$C_l \equiv Sp(2l),$$
$$D_l \equiv SO(2l).$$

五个例外李代数是 G_2, F_4, E_6, E_7 和 E_8.

2. 经典李代数序列的根

$A_l\equiv SU(l+1)$是$l+1$维复空间幺模幺正群. 考虑在一个 $l+1$ 维空间中，取其正交归一基 $e_i, i=1,\cdots,l+1$. 为具体起见，可取

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1,0,0,\cdots,0),\\
e_2 &= (0,1,0,\cdots,0),\\
&\vdots\qquad\qquad\vdots\\
e_{l+1} &= (0,0,0,\cdots,1).
\end{aligned}
$$

作线性组合

$$e_i - e_j,\quad i,j=1,2,\cdots,l+1,\quad i\neq j,$$

共有 $l(l+1)$ 种组合，这就是 A_l 的所有的不为零的根．再加上 l 个零根，A_l 的根的个数(即维数)为$(l+1)^2-1$.

值得注意的是，尽管 A_l 的根是 $l+1$ 维空间中给出的，但实际上 A_l 的所有的根都仍在一个 l 维空间内，即在 $l+1$ 维空间中的一个 l 维子空间(即通常所谓超平面)上．这一点反映在所有的根都可表为 e_i-e_j，亦即所有的根在给定基上的坐标都满足总和为零的条件．令 $x_1,\cdots\cdots,x_{l+1}$ 表一个 $l+1$ 维空间矢量的坐标，则 A_l 的根矢量坐标都在 $\sum_{i=1}^{l+1} x_i=0$ 的 l 维超平面上.

$B_l\equiv SO(2l+1)$是 $2l+1$ 维幺模正交群．考虑 l 维空间中的正交归一基 $e_i, i=1,\cdots,l$，取下述线性组合:

$$\pm e_i,\ \pm e_i\pm e_j,\ i,j=1,2,\cdots,l,\ i\neq j,$$

即 B_l 的全部不为零的根，共 $2l+2l(l-1)=2l^2$ 个，再加上 l 个零根，B_l 的维数为 $l(2l+1)$.

$C_l\equiv Sp(2l)$是 $2l$ 维辛群．考虑 l 维空间中的正交归一基e_i, $i=1,\cdots,l$．取下述线性组合:

$$\pm 2e_i,\ \pm e_i+e_j\quad i,j=1,2,\cdots,l,\ i\neq j,$$

显然 C_l 的不为零的根的数目和维数都和 B_l 完全相同，即维数为 $l(2l+1)$.

$D_l\equiv SO(2l)$是 $2l$ 维幺模正交群．考虑 l 维空间中的正交归一基 $e_i, i=1,\cdots,l$，取下述线性组合:

$$\pm e_i \pm e_j \quad i,j=1,2,\cdots,l,\ i\neq j,$$

这样不为零的根的个数为 $2l(l-1)$，维数为 $l(2l-1)$。

3. 例外李代数的根系

在前面已给出例外李代数中 G_2 的根图，现在分别介绍另四个例外李代数的根系.

F_4：在 B_4 的根系基础上再加组合

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$$

因此 F_4 的维数为 $36+16=52$. F_4 中显然包含 B_4 为其子代数，$F_4 \supset B_4 = SO(9)$.

E_6：在 A_5 的根系基础上再加

$$\pm\sqrt{2}\,e_7,$$

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}},$$

其中括号中 $e_1, \cdots, e_6$ 的符号要求 3 个为正号，3个为负号. 这样新增加一个零根，42 个非零根，因此 E_6 的维数为 $35+1+42=78$.

由于 e_7 是原来 A_5 中没有的，而在 E_6 中 $\pm\sqrt{2}\,e_7$ 是根，因此有 $E_6 \supset A_5 \oplus A_1$ 即 $E_6 \supset SU(6) \oplus SU(2)$. 注意这里用 $\oplus$ 是因为指李代数的直和关系，如果换为李群则应改为直乘关系.

E_7：在 A_7 的根系基础上再加

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm \cdots\cdots \pm e_8),$$

其中括号内各系数必须 4 个取正号，另 4 个取负号。这样新增加 70 个非零根，因此 E_7 的维数为 $63+70=133$. 显然，$E_7 \supset A_7 = SU(8)$. 由于 E_7 中没有引入新的单位元，因此没有新增加 $SU(2)$ 子代数.

E_8：在 D_8 根系的基础上再加

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm \cdots\cdots \pm e_8),$$

其中括号中的符号取法为保证偶数个正号，偶数个负号．这样新增加 128 个非零根，E_8 的维数为 $120+128=248$．显然，$E_8 \supset D_8 = SO(16)$．

4．根的长短

在前面已讨论了所有单纯李代数的分类以及各单纯李代数的根系的构成．在 $l=2$ 的根图中可以看出一个特点：一个群所有的根，或者是等长的矢量，或者是可分为两组，一组为长根，一组为短根．换言之，在任一根图中不出现三种不等长的根．

在 $l>2$ 时仍然保持这个特征．具有单长度根所组成根系的李代数有 A_l, D_l, E_6, E_7, E_8，具有双长度根所组成根系的李代数有 B_l, C_l, G_2, F_4．这个特征的几何意义是：不论单纯李代数的秩 l 为多少，李代数的根矢量在 l 维空间中分布在一个或两个 $l-1$ 维球面上．

单纯李代数根系最多只由两种长度的根组成，这个性质在引入 Dynkin 图时是很重要的．

§ 3.4 Dynkin 图

1．单根的基本性质

在 $l>2$ 时，实际上很难具体画出根图，因为这个图是在 l 维空间中的．为了在 $l>2$ 时也能用一定的平面图来反映根的性质，从而反映李代数的性质，引入了 Dynkin 图．而为了了解 Dynkin 图的特点，首先要研究单根的性质．

对于 m 维秩为 l 的单纯李代数，取一组 l 维空间的正交归一基，并规定这组基的序号，则李代数的根可以用这组基上的坐标来表示，若某一个根的第一个不为零的坐标是正数，则称这个根为正

根；若该根的第一个不为零的坐标为负数，则称为负根；若坐标全是零时就是零根．零根有 l 个，正根和负根各为 $\frac{m-l}{2}$ 个．

值得注意的是，在这根矢量所存在的 l 维空间中，正交归一基的选取是任意的，基的序号规定也是任意的，这些任意性并不影响下面的讨论结果．

如果某一正根不能写成其它正根的正整数系数线性组合，则称为单根．维数为 m，秩为 l 的单纯李代数的单根共 l 个．所有正根都可表为单根的正整系数线性组合．

单根有以下基本性质．

(1) 如果 α,β 是单根，则 $\alpha-\beta$ 不是单根，且不是根；

(2) 如果 α,β 是单根，则 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ 为负整数；

(3) 两个单根 α 和 β 之间的夹角取值及其长度比只能取下述值：

α 和 β 间夹角	90°	120°	135°	150°
$(\beta,\beta)/(\alpha,\alpha)$	不定	1	2	3

例如 $A_2=SU(3)$，按标准作法根是在 3 维空间中的一个 2 维平面上给出的，在这个平面内给出的根图就是前面图 3.2 所介绍的．如图取正交基为 e_1,e_2，则正根为 $(2,0)$，$(1,-\sqrt{3})$ 和 $(1,\sqrt{3})$．由于 $(2,0)=(1,-\sqrt{3})+(1,\sqrt{3})$，它不是单根，而 $(1,-\sqrt{3})$ 和 $(1,\sqrt{3})$ 则是单根．这两个根的模都是 2，内积为 -2，因此 $\cos\varphi=-1/2$，即 $\varphi=120°$，这些结果都明显地在图 3.3 中标出．

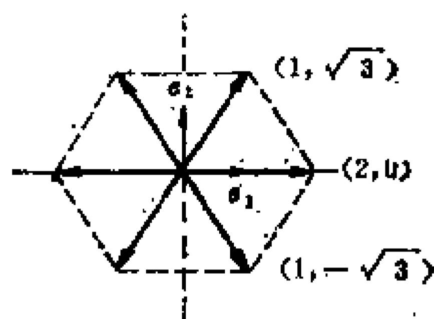


图 3.3 $A_2=SU(3)$ 的单根

例如 B_3，非零根共 18 个，其中 9 个为正根，即 $(1,0,0)$，$(0,1,$

0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, −1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, −1), (0, 1, 1), (0, 1, −1). 9 个正根中单根为

$$\alpha=(0,0,1),$$
$$\beta=(0,1,-1),$$
$$\gamma=(1,-1,0),$$

由此得到

$$(\alpha,\alpha)=1,\qquad (\beta,\beta)=2,\qquad (\gamma,\gamma)=2,$$
$$(\alpha,\beta)=-1,\qquad (\beta,\gamma)=-1,\qquad (\alpha,\gamma)=0.$$

这样对应的 $\cos\varphi$ 为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 0, 而 φ 角为 135°, 120°, 90°.

现在来看，一般地说如何来找单根. 当 $l>2$ 时很难在根图上去找单根，这需要更一般的方法和原则.

首先选一组正交归一基，把全部根通过这些基表出，同时也规定好基的序号，然后将全部正根挑出来. 在正根中，从大序号的着手，如果有一个正根只由最大序号的基组成，则它是单根；如果含最大序号基的根同时还有其它序号的基包含于其内，则应尽量选取仅包含次大序号的基，这样的根中有两个将为单根(如果只存在一个则当然是单根). 下面单根的挑选是将根中所含基的序号逐个减少，对于包含最小序号基为 e_i 的所有正根中，选择其中包含的其它基最靠近 e_i，而且其坐标尽可能小的根往往是单根(例如，e_i-e_{i+1}，如果是根的话就可能是单根). 根据上述方法原则，针对具体的单纯李代数，很快就会把单根找出来.

例如，对于 A_l，所有的根可表为

$$e_i-e_j,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,l+1.$$

这些根中的正根可排列如下:

$$
\begin{array}{lllll}
\underline{e_1-e_2} & & & & \\
e_1-e_3 & \underline{e_2-e_3} & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
e_1-e_l & e_2-e_l & \cdots & \underline{e_{l-1}-e_l} & \\
e_1-e_{l+1} & e_2-e_{l+1} & \cdots & e_{l-1}-e_{l+1} & \underline{e_l-e_{l+1}}
\end{array}
$$

则按上述规则给出标有~~~~~~的是单根．实际上任一正根都可写成在上表中它所处行和列对应的两个单根及其间的各单根之和．

类似地，B_l 的单根为 $e_i-e_{i+1}, i=1, \cdots, l-1$，再补上一个 e_l．

C_l 的单根也是 $e_i-e_{i+1}, i=1,\cdots,l-1$，再补上一个 $2e_l$．

D_l 的单根也是 e_i-e_{i+1}，$i=1, \cdots, l-1$，再补上一个 $e_{l+1}+e_l$．

2. Dynkin 图

单纯李群的性质由相应的李代数决定，而李代数的性质具体体现为根的分布和相互关系，这些根的分布和相互关系实际上可以归结为 l 个单根的分布和相互关系．l 个单根的相互关系可以用Dynkin 图来表示．很重要的一点是：对于单纯李群来说，与Dynkin 图的对应关系是唯一的．

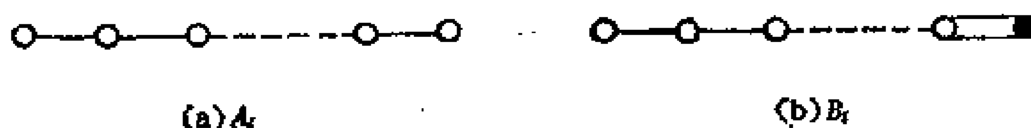
前面已提到，任何单纯李代数的非零根的长度最多只有两种，因此单根也只有长短之分．用符号"○"表示长根，"●"表示短根，根之间的角度关系用线表示如图 3.4 所示．线条的根数既描写了两根的夹角，同时还描写了两个根长度平方之比．如果两根之间



图 3.4 单纯李群的长度和夹角表示

无线相联，一方面表明这两根互相正交，另一方面还表明这两根长度平方之比在这里没有限制.

对于 A_l，根无长短之分，两根之间夹角或为 90°，或为 120°，Dynkin 图如图 3.5(a)所示.



(a) A_l　　　　(b) B_l

图 3.5　A_l 和 B_l 的 Dynkin 图

对于 B_l，有 $l-1$ 个长根，1 个短根，长根之间夹角或为 90°，或为 120°，短根与一个长根之间的夹角为 135°，与其它长根之间夹角为 90°，其 Dynkin 图如图 3.5(b)所示.

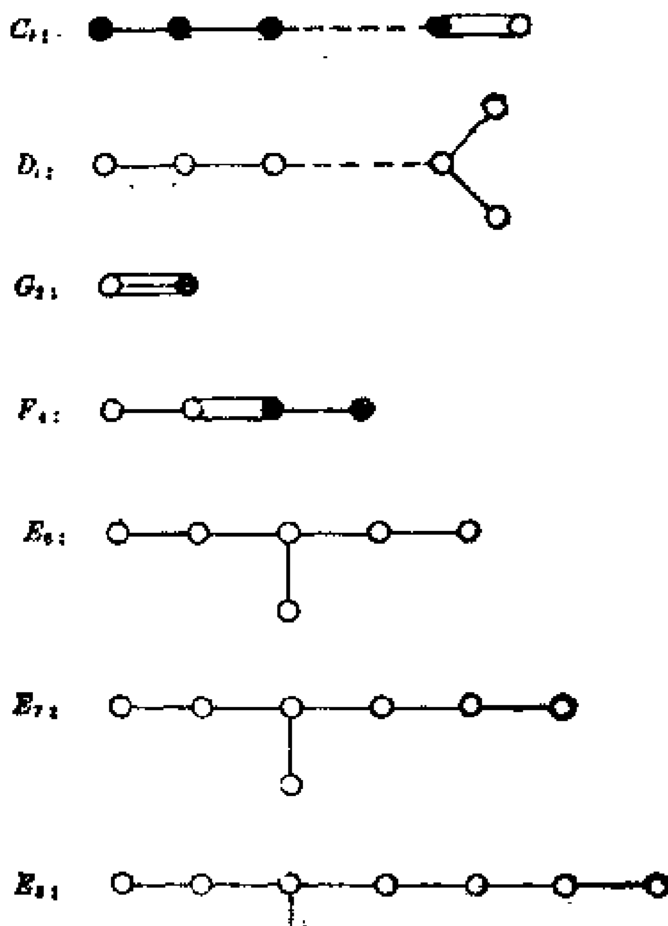


图 3.6　C_l, D_l, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 的 Dynkin 图

其它李代数也可类似地讨论，给出的Dynkin图如图 3.6所示.

3. Cartan 矩阵

Dynkin 图所描写的各单根之间关系可以用 Cartan 矩阵体现出来. 首先对 Dynkin 图中的 l 个单根标以序号，作 $l\times l$ 矩阵 A，其元素为

$$A_{ij}=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$$

其中 α_i, α_j 分别表示第 i 和第 j 个单根. 对于对角元 $i=j$，显然 $A_{ij}=2$，若 $i\neq j$，由单根的性质可知 A_{ij} 为零或负整数，分别按以下规则给出:

无线联接，$A_{ij}=0$;

单线联接，$A_{ij}=-1$;

多线联接，长根到短根，$A_{ij}=-1$;

多线联接，短根到长根，$A_{ij}=-$(线的根数).

按照这些规则可以根据 Dynkin 图给出相应的 Cartan矩阵，单纯李代数的 Cartan 矩阵如下:

$$A_l:\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_l:\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_l:\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_l:\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G_2:\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6:\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$
E_7:\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}
$$

$$
E_8:\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}
$$

第四章 李群的表示

§4.1 李群表示的一些定义和性质

1. 忠实表示

如果给出一个映象关系，将群的每一个元素对应于一个矩阵，群的乘法对应于矩阵的乘法，则实现了这个群到一个矩阵群的同态映象，这时称这矩阵群为这个群的一个表示. 如果这个映象关系是一一对应的，则实现的是同构映象，这时的表示称为忠实表示.

李代数的表示是指李代数中每一个矢量（如果这个李代数对应于一个李群，则这里所说李代数的矢量也就是指李群的生成元）对应于 n 维空间的一个矩阵，李代数中的对易式运算对应于矩阵乘法的对易运算. 如果这对应关系是一一对应的，则这表示是忠实表示.

如果考虑李群生成元构成的李代数的表示，它与李群的表示是一一对应的. 由于研究李群生成元的李代数比研究李群本身要方便得多，一般希望尽可能通过研究李代数的表示性质来了解李群相应的表示的性质.

现在来看李代数表示和李群表示的关系. 设有一个李群 G，其生成元 X_i 构成一个李代数 A，其代数关系为

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k.$$

李群 G 的元素可用群参数 α^i 来标记，并可通过生成元 X_i 表为

$$g(\alpha) = e^{\alpha^i X_i},$$

注意，到目前为止，李群和李代数都是抽象的，生成元 X_i 也是抽象的算符.

现在考虑李群和李代数的 n 维表示，元素 $g(\alpha)$ 的表示应是这 n 维空间中的一个矩阵，也就是这个 n 维空间的线性变换. 它作用到任一 n 维矢量 Φ 上使之变换为另一新的矢量. 我们需要考察 $g(\alpha)$ 的表示矩阵应采取什么形式.

以抽象的李代数来说，唯一有定义的运算是对易式，因此生成元 X_i 对矢量 Φ 的运算就是 X_i 与 Φ 的对易式 $[X_i, \Phi]$. 另一方面这个运算的后果在线性空间中应反映为对 Φ 作了某种线性变换，即相当于用某个 $n\times n$ 矩阵 Y_i 去乘 Φ，即

$$[X_i, \Phi]=Y_i\Phi,$$

注意等式左边是抽象的代数运算，右边则是具体的矩阵乘法. Y_i 就是 X_i 在 n 维空间的矩阵表示. 这个重要结论成立的前提是对应于 X_i 满足的李代数，Y_i 以矩阵乘法的形式也全部满足. 下面我们来证明这一点.

由李代数的 Jacobi 恒等式

$$[X_i,[X_j,\Phi]]+[X_j,[\Phi,X_i]]+[\Phi,[X_i,X_j]]=0$$

将上式代入得

$$[X_i,Y_j\Phi]+[X_j,-Y_i\Phi]+[\Phi,C_{ij}^kX_k]=0,$$

再利用上式代入最后得

$$(Y_iY_j-Y_jY_i)\Phi=C_{ij}^kY_k\Phi.$$

由于 Φ 是 n 维空间任意矢量，因此以下矩阵等式成立

$$[Y_i,Y_j]=C_{ij}^kY_k,$$

这样就证明了 Y_i 是 X_i 的 n 维表示.

要强调的是 $[X_i, X_j]$ 是一种抽象运算，但是 $[Y_i, Y_j]$ 则是一种具体运算，它可表为 $Y_iY_j-Y_jY_i$，并且乘法具体就是矩阵乘法. 因此尽管同样用[,]表示，含意并不相同.

现在再考察用群元素 $g(\alpha)$ 对矢量 Φ 进行运算，这是一种抽象的运算，相当于某种变换，可表为 $g(\alpha)\Phi(g(\alpha))^{-1}$. 这个变换从 n 维空间来说应体现为一个线性变换，即应体现为代表这变换的矩阵去乘 Φ. 现在着手讨论这个问题.

由于

$$g(\alpha)=e^{\alpha^i X_i},$$

$$(g(\alpha))^{-1}=g(-\alpha)=e^{-\alpha^i X_i}.$$

引入 $X_\alpha=\alpha^i X_i$，则有

$$g(\alpha)\Phi(g(\alpha))^{-1}=e^{X_\alpha}\Phi e^{-X_\alpha},$$

利用矩阵乘法公式得

$$\begin{aligned}g(\alpha)\Phi(g(\alpha))^{-1}&=\Phi+[X_\alpha\Phi]+\frac{1}{2!}[X_\alpha,[X_\alpha,\Phi]]+\cdots\\&=\Phi+\alpha^i Y_i\Phi+\frac{1}{2!}(\alpha^i Y_i)^2\Phi+\cdots\\&=e^{\alpha^i Y_i}\Phi,\end{aligned}$$

这说明用群元素 $g(\alpha)=e^{\alpha^i X_i}$ 对 n 维空间矢量 Φ 运算的结果可以具体体现为用一个相应的 n 维矩阵 $e^{\alpha^i Y_i}$ 去乘这个矢量. 这也就表明 $e^{\alpha^i Y_i}$ 是 $g(\alpha)=e^{\alpha^i X_i}$ 的 n 维表示.

上述结果表明：如果已知李代数生成元的 n 维表示，则只要把李群元素的表达式中的生成元用其表示矩阵代入，就得到李群的 n 维表示.

物理上常采用生成元 $I_i=-iX_i$. 如果 I_i 的表示矩阵为 L_i，则群元素 $e^{i\alpha^i I_i}$ 的表示矩阵为 $e^{i\alpha^i L_i}$.

最后顺便再说明一点. 在找寻 X_i 的表示 Y_i 时，如果把基本关系改为

$$[X_i,\Phi]=\eta Y_i\Phi,$$

其中 η 为一常数因子. 现考察 η 可取哪些值，这相当于在原来的推导中 Y_i 一律换成 ηY_i，这个改动的后果是最后得到

$$\eta^2[Y_i, Y_j] = \eta C_{ij}^k Y_k.$$

如要回到所需要的代数对易式，必须取 $\eta=1$. 如果取 $\eta=-1$ 来作出发点是不自洽的.

2. 可约表示和不可约表示

任何一个矩阵可以通过子矩阵形式给出. 如果对于一个 $n\times n$ 矩阵，通过子矩阵形式给出时，行的分组方式和列的分组方式相同，则称为该矩阵按子矩阵对称表达式给出. 显然矩阵按子矩阵的对称表达式给出时，对角线上的子矩阵都是正方子矩阵.

如果生成元 X_i 的某一表示可以通过一个等价变换变为按子矩阵对称表达式含意下的右上三角矩阵(即除对角上子矩阵外，左下三角中各元素都为零)，则称该表示为可约表示; 如变换为按子矩阵对称表达式含意下的对角矩阵，则称该表示为完全可约; 如不能找到一个等价变换来作到上述两种情形之一，则称该表示为不可约表示.

从定义来看，完全可约表示是可约表示的特殊情形. 因此完全可约表示一定可约，但可约表示不一定完全可约.

3. 实表示和复表示

若 D 是李代数 A 的一个表示，这就是说对 A 中任一矢量 (即代数 A 所对应的李群的生成元) X_i, 在 D 中有一个矩阵 Y_i 与之对应，并且对应于 X_i 满足的代数关系

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k,$$

Y_i 满足同样的矩阵乘法对易关系:

$$[Y_i, Y_j] = C_{ij}^k Y_k.$$

Y_i^* 组成的集合 D^*, Y_i^* 满足的乘法对易关系为

$$[Y_i^*, Y_j^*] = C_{ij}^{k*} Y_k^*$$

因此，如果 C_{ij}^k 为实数，即 A 为实李代数时，D^* 也是 A 的一个表示.

由于李群对应的李代数是实李代数，因此对应于李群的李代数 A，D 是一个表示，D^* 也是一个表示．再利用李群与李代数表示间的联系，立刻得到：D 给出李群的一个表示，则 D^* 也给出李群的一个表示．有时称 D^* 为 D 的复共轭表示，但要注意不要和共轭表示相混．

如果李群的生成元用 $I_i=-iX_i$ 表述出来，则 I_i 满足的代数关系为

$$[I_i, I_j]=-iC_{ij}^k I_k,$$

在表示 D 中对应 I_i 的矩阵为 L_i，它满足

$$[L_i, L_j]=-iC_{ij}^k L_k$$

则 D^* 中 I_i 应对应于矩阵 $-L_i^*$，这个负号是因为 $Y_i=iL_i$，从而 $Y_i^*=-iL_i^*$ 的关系中多了个负号所决定的．因此在讨论复共轭表示时，要注意生成元是以 X_i 的形式还是 I_i 的形式出现．

对于复共轭表示，有以下性质：

(1) 如果 D 是不可约表示，则 D^* 也是不可约表示；

(2) 如果 D 是幺正表示，D^* 也是幺正表示；

(3) 一般说来 D 和 D^* 不一定等价．如果 D 和 D^* 等价，即能找到矩阵 C 使 $D=CD^*C^{-1}$（指 D 中每一矩阵 Y_i 都与相应的 D^* 中的复共轭矩阵 Y_i^* 满足上述等价变换关系），则称 D 是实表示；如果找不到 C 来实现上述等价变换，则称 D 为复表示．

上述实表示条件 $D=CD^*C^{-1}$ 实际上是通常实数条件在矩阵形式下的推广，允许 C 矩阵的出现是因为对于矩阵来说，一般乘法并不对易．

现在对实表示作一些具体讨论，由

$$D=CD^*C^{-1}$$

出发，求复共轭得 $D^*=C^*D(C^{-1})^*$，但同时又有 $D^*=C^{-1}DC$．这两式同时满足要求 $C^{-1}=\eta C^*$，η 为一常数，并且 $\eta^*=\eta$，即 η 为

实数.

不失讨论的普遍性，可选$|\eta|=1$，这时有两个可能性：$\eta=\pm 1$. 如果C是幺正矩阵，这两个可能性相应于$C=\tilde{C}$和$C=-\tilde{C}$两种情形.

$C=\tilde{C}$时，可以找到变换矩阵U，使得UDU^{-1}为实的.

$C=-\tilde{C}$时，可以找到变换矩阵U，使得UDU^{-1}满足

$$Z(UDU^{-1})=(UDU^{-1})^{*}Z$$

其中

$$Z=\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，一般说来，如果D是实表示，即满足$D=CD^{*}C^{-1}$，其中C为幺正矩阵，则还可分为两类：C是对称矩阵时，D称为正号实表示；C为反对称矩阵时，D称为负号实表示.

4. 共轭表示

如果D是李群G的一个表示，则一般说来，D^{+}并不是G的表示. 因为对应于$g_1g_2 \longrightarrow D_1D_2$，$(D_1D_2)^{+}=D_2^{+}D_1^{+}\neq D_1^{+}D_2^{+}$，即不符合表示的定义. 但是$(D^{+})^{-1}$仍是$G$的表示，因为$((D_1D_2)^{+})^{-1}=(D_2^{+}D_1^{+})^{-1}=(D_1^{+})^{-1}(D_2^{+})^{-1}$. $(D^{+})^{-1}$称为D的共轭表示.

这个共轭表示的定义和复共轭表示是不同的. 如果D是幺正表示，则其共轭表示$(D^{+})^{-1}=D$就是D本身.

5. 幺正表示和非幺正表示

如果群G的表示D中群元素的表示矩阵为幺正矩阵，则称D

为G的幺正表示，否则称为非幺正表示.

关于幺正表示和非幺正表示，有下述性质在应用上很重要：

(1) 可解李代数所给出的可解李群的有限维不可约表示是一维的；

(2) 单纯的连通的紧致李群的不可约幺正表示都是有限维的；

(3) 单纯的连通的非紧致李群的不可约幺正表示除显然表示外，都是无限维的.

在实际物理应用中，常常涉及的是单纯连通紧致李群，考虑其有限维表示时，自然都是幺正表示，从而使上面定义的共轭表示无意义了. 但是上面引入的复共轭表示还是有意义的，因此有时人们将复共轭表示称为共轭表示. 由于表示是幺正表示$D^{+}=D^{-1}$，$D^{*}=\tilde{D}^{+}=(\tilde{D}^{-1})$，这表明$D^{+}$虽不是表示，但$(\tilde{D}^{+})=(\tilde{D}^{-1})$仍是表示，即原表示的复共轭表示. 考虑了这些联系，D^{+}虽然按表示的定义来说并不是表示，但有时在下述了解下也把它称为一个表示：如果群元素的乘法在D^{+}中对应矩阵乘法时一律都反向进行，即$g_1g_2\longrightarrow D_2^{+}D_1^{+}$. 这样理解的依据实际上就是$D^{*}=(\tilde{D}^{+})$也是一个表示，在这样的含意下，常常说$D^{+}$也是$G$的一个表示，并且常常把$D^{*}$和$D^{+}$都称为$D$的共轭表示. 要强调的是，当遇到这种情况时，只要了解D^{*}和D^{+}称为D的共轭表示的分别的含意，也就可以避免不必要的混乱. 并且考虑到含意上的差别后，也就可以明显看出D^{*}和D^{+}表示反映的物理内容实质上是一样的.

§4.2 权的基本性质

1. 权和权空间

考虑李群的表示，对于紧致李群，所有的有限维不可约表示都是幺正表示，因此我们考虑典型的n维不可约表示.

设李群秩为 l，即相应的李代数有 l 个零根．考虑李群的一个 n 维表示，群的生成元 X_i 对应于 n 维矩阵 Y_i；群元素 $e^{\alpha^i X_i}$ 对应于一个 n 维矩阵 $e^{\alpha^i Y_i}$；群元素的乘法对应于相应的矩阵的乘法．值得注意的是李群对它的一个 n 维表示的对应全都可以归结为把群的生成元用相应 n 维表示矩阵来代替．

半单纯李代数可以表为标准形式：

$$[H_i, H_j]=0,$$

$$[H_i, E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=\alpha^i H_i,$$

$$[E_\alpha, E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}.$$

对于 n 维表示来说，这里的 H_i 和 E_α 换成相应的 n 维表示矩阵，等式理解作矩阵等式仍然成立．为简便起见，仍用 H_i 和 E_α 代表 n 维表示中相应的表示矩阵．

在 n 维表示空间中，可以将矩阵 H_i 对角化，得到

$$H_i|\Lambda\rangle=\Lambda_i|\Lambda\rangle \quad i=1,\cdots,l,$$

其中 $|\Lambda\rangle$是 n 维空间中的一个矢量，由于 l 个 H_i 是互相对易的，$|\Lambda\rangle$是它们的共同本征态，H_i 的本征值为 Λ_i．l 个 H_i 的本征值构成另一个 l 维空间的矢量 Λ，它在这个 l 维空间中的分量为Λ_i．

将$[H_i, E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha$ 乘到$|\Lambda\rangle$上，得到

$$H_i E_\alpha|\Lambda\rangle=(\Lambda_i+\alpha_i)E_\alpha|\Lambda\rangle$$

这表明如果 $E_\alpha|\Lambda\rangle\neq 0$，则 $E_\alpha|\Lambda\rangle$也是 H_i 的一个本征态，对应的本征值是$(\Lambda_i+\alpha_i)$，即 l 维空间中的矢量 $\Lambda+\alpha$．

对于一个 n 维表示，H_i 的一组本征值 Λ_i 构成一个 l 维空间的矢量 Λ，Λ 称为权或权矢量；权所存在的 l 维空间称为权空间．

利用上面的结果，如果已知权 Λ，则可得到权 $\Lambda+\alpha$ 对应的本征态 $E_\alpha|\Lambda\rangle$．这样只要知道 H_i 的一个本征态，就可逐步找出

其它本征态．问题是在一个 n 维表示中，这样的态独立的共有几个．对于单纯紧致李群，由于有限维表示都是幺正表示，Y_i 为反厄米矩阵，由此得到在 n 维表示中 H_i 的独立本征态有且仅有 n 个，它们对应的 n 个权矢量中可以允许有简并，因此不同的权矢量小于或等于 n 个．

为了避免群表示空间和权空间概念上的混淆，我们看看角动量的例子，它由 $SU(2)$ 群描写．考虑一个角动量为 2 的表示，即 5 维表示，它的表示空间为 5 维．但 $SU(2)$ 群的秩为 $l=1$，因此权空间为 1 维．$SU(2)$ 群的 H 生成元通常取作角动量在 Z 方向的投影，在 5 维表示中它的本征态有 5 个，对应于 5 个不同的本征值，亦即对应于 5 个不同的权．

因此，表示空间和权空间是完全不同的概念．权空间的维数取决于 H_i 的个数，即群的秩，亦即权空间维数的多少是由群的性质所决定的．但是权空间中，权矢量的数目及分布则是决定于表示．不同的表示所包含的权矢量可以在同一权空间中给出，由于不同的表示所包含的权矢量数目和分布不同，因此可以由权矢量的数目和分布来代表表示的性质．

权和根都是 l 维空间的矢量，它们有很多相似之处，但又有所不同，需要了解它们的联系和不同．

(1) 根是由群本身决定的，与表示无关．权是依赖于表示的；

(2) 根是标志生成元的，其个数等于生成元的个数，即群的维数 m．权是标志表示中的 H_i 的本征态的，其个数等于表示的维数 n，当然其中可以有简并；

(3) 用根标志生成元时，是通过生成元李代数形式的本征方程．用权标志态时，是通过 n 维表示空间中的矩阵形式的本征方程；

(4) 任一不可约表示中，两个权之差总可写成这个群的根的

整系数线性组合.

既然不同的表示中权的数目和分布是不同的,就需要回答,如果用权来标志表示时,最少需要用哪些信息. 为了讨论这个问题,引入两个概念:

(1) 正权:在权空间中任取一组基并规定其序号,如果权矢量在这组基中表述为$(\Lambda_1, \cdots, \Lambda_l)$,其中第一个非零分量是正的,则这个权就称为正权.

(2) 最高权:在所有正权中,第一个非零的正分量最大的权,称为最高权.

正权和最高权的确定显然是依赖于基的选择,但是利用它们来讨论问题所得结果往往并不依赖于基的选择.

在n维表示空间中取一组基,每一个基矢量都是H_i的本征矢量,记作

$$|\Lambda^{(1)}\rangle, |\Lambda^{(2)}\rangle, \cdots, |\Lambda^{(n)}\rangle,$$

并使这样的排列满足$\Lambda^{(1)} \geqslant \Lambda^{(2)} \geqslant \cdots \geqslant \Lambda^{(n)}$,这样排列的一组基叫做正则基.

对上面的规定补充说明两点:$\Lambda^{(1)} \geqslant \Lambda^{(2)}$是指$\Lambda^{(1)}$和$\Lambda^{(2)}$的第一个分量相比较时$\Lambda_1^{(1)} \geqslant \Lambda_1^{(2)}$,如果是等号成立,则还要求$\Lambda_2^{(1)} \geqslant \Lambda_2^{(2)}$,依此类推;另外由于单纯紧致李群的有限维不可约表示都是幺正表示,由H_i的本征矢量所组成的这组基显然是一组正交基. 因此在讨论单纯紧致李群的有限维不可约表示时,正则基可以是正交归一的.

2. 权的有关定理

(1) 如果Λ是表示中的一个权,α是群的一个根,则存在一个权链

$$\Lambda - j\alpha, \Lambda - (j-1)\alpha, \cdots, \Lambda + k\alpha,$$

其中j, k是整数,并满足

$$\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=j-k.$$

推论：至少 $\Lambda-\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ 也是一个权.

(2) 每一个表示至少有一个权.

(3) 如果$|\Lambda\rangle$可表成$|\Lambda^{(k)}\rangle$的线性组合，并且$|\Lambda\rangle$与任何一个$|\Lambda^{(k)}\rangle$不重合，则$|\Lambda\rangle=0$.

推论：n 维表示空间独立的权数$\leqslant n$.

如果对应一个权只有一个本征矢量，则称该权为单权；如果对应一个权有 r 个本征量，$r>1$，则称该权为 r 重权. 正因为可以有多重权存在，所以 n 维表示中独立权矢量的数目有可能小于 n.

(4) 如 Λ 是表示中的一个权，α 是群的一个根，则 Λ 和 $\Lambda-\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ 有相同的重数.

根据这几个定理，就可以讨论权的各种应用，其中最直接的应用是权图，这里就不准备仔细介绍了.

3. 不可约表示的分类

主要讲几点利用权来分类不可约表示的方法：

(1) 不可约表示的最高权是单权；

(2) 最高权相等的不可约表示相同(确切来说是等价)；

这里第一个性质提供了用最高权来标记不可约表示的可能性. 第二个性质则表明这样的标记是一一对应的. 根据这两个性质就可以把不可约表示按高权来分类.

(3) Λ 是 G 的某不可约表示最高权的充要条件为对于群 G 的单根 α

$$\Lambda_\alpha=\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

是非负整数，并且有

$$E_{-\alpha}^{k}|\Lambda\rangle \neq 0 (k \leqslant \Lambda_{\alpha})$$
$$= 0 (k > \Lambda_{\alpha}).$$

注意:对于秩为 l 的李群,共有 l 个单根. 因此最高权充要条件中出现的 Λ_{α} 共有 l 个,它们给出在 l 维权空间 Λ 是最高权的充要条件. 同时 $E_{-\alpha}^{k}|\Lambda\rangle$ 所给出的结果,也由于 α 有 l 个独立的取法而是有 l 个独立的结果,分别与 l 个充要条件对应. 上两个结果合在一起实际上说明,从最高权 Λ 和任一单根 α 出发,这表示中存在权链

$$\Lambda, \Lambda-\alpha, \cdots, \Lambda-\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

例如描写角动量的 $SU(2)$ 群,考虑角动量为 2 的表示. 角动量第 3 分量的投影可取值为 $2, 1, 0, -1, -2$, 由于 $SU(2)$ 群的秩 $l=1$, 权空间即一维空间,上面给出这 5 个值即权的值,最高权为 2. $E_{-\alpha}$ 相应于角动量分量 L_{-}, 它对本征态每作用一次就使权值减少 1,这样 $E_{-\alpha}^{k}|2\rangle$ 在 $k\leqslant 4$ 时给出对应于权为 $2-k$ 的态, 但 $k>4$ 时则得零. $\Lambda=\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=4$ 就是从最高权沿链下降的最多的步数.

由以上几点可以看出,不可约表示与最高权是一一对应的,通过最高权与单根,就可定出表示中的 l 条基本权链,并进而把表示完全确定下来.

现在讨论关于权的完备集问题.对于秩为 l 的 m 维李群来说,它的 n 维不可约表示中 $H_i(i=1,\cdots,l)$ 有 n 个本征矢量, 并可利用这 n 个本征矢量构成这个 n 维空间的正交归一完备基. 然而这 n 个本征矢量对应的权的数目却小于等于 n,这是因为有的权是多重权,同一个权值对应于不止一个本征矢量,亦即权与本征矢量不是一一对应的.

最高权是单权, 这为用最高权来标记表示准备了条件. 但一

般说来权与本征矢量的不一一对应表明用权来标记态是不完备的. 如果保证与本征态的一一对应性，就还需要引入补充的参量来解除权的简并性，在 $l=1$的情形，给定表示中权与本征矢量是一一对应的，不需要引入补充的参量. 但在 $l>1$ 的情形，一般都需要引入补充的参量才能实现权的完备性. 补充参量的选取常通过按子群分解的群链给出，这在后面还要加以介绍.

§4.3 群表示的直乘和分解

1. 表示的直乘

如果 D_1 和 D_2 是群 G 的两个表示，则 D_1 和 D_2 的直乘 $D=D_1\times D_2$ 也是这个群的一个表示. 若表示 D_1 和 D_2 的维数分别是 n_1 和 n_2，则 D 的表示维数为 $n=n_1\times n_2$. 若 D_1 和 D_2 都是不可约的，则 D 一般情况下是可约的，只有特殊情况例外，例如 D_1 和 D_2 之一是一维表示的情形.

表示的直乘满足下述运算规则：

交换律　$D_1\times D_2=D_2\times D_1$,

结合律　$(D_1\times D_2)\times D_3=D_1\times(D_2\times D_3)$,

分配律　$(D_1+D_2)\times D_3=D_1\times D_3+D_2\times D_3$,

其中 D_1+D_2 表示 D_1 和 D_2 的直和.

2. 直乘的权空间和直乘的分解

如果 D_1 是 n_1 维表示，其权矢量为 $\Lambda^{(1)}$，我们把多重权算作多个权矢量，则 D_1 的权矢量共 n_1 个，分别对应 n_1 个表示空间的本征矢量，它们构成 D_1 表示空间的一组正交归一基. 同样地，如果 D_2 是 n_2 维表示，其权矢量为 $\Lambda^{(2)}$，共 n_2 个，分别对应 n_2 个表示空间的本征矢量，构成 D_2 表示空间的一组正交归一基.

表示 $D=D_1\times D_2$ 的权为 $\Lambda=\Lambda^{(1)}+\Lambda^{(2)}$，表示维数为 $n=n_1\times n_2$，权矢量的数目也是 $n_1\times n_2$，它们分别对应 $n_1\times n_2$ 个表示空间

的本征矢量，这些本征矢量构成 D 表示空间的一组正交归一基。

需要研究的问题是：如果 D_1 和 D_2 是不可约表示，一般说来，得到的 $D=D_1\times D_2$ 往往是可约表示，要研究的是如何将 D 分解成不可约表示的直和. 这样作的关键一点是利用最高权的下述性质：不可约表示有且仅有一个最高权，即不可约表示与最高权是一一对应的。

具体作法如下：

(1) 利用 $\Lambda=\Lambda^{(1)}+\Lambda^{(2)}$ 给出 D 的所有 $n=n_1\times n_2$ 个权；

(2) 找出其中的最高权，并找出由这最高权所标记的不可约表示 D_1' 的全部权；

(3) 从这 $n_1\times n_2$ 个权中扣除 D_1' 的全部权.

再继续上述(2)和(3)的过程，这样直到全部权扣除为止，这样 D 就分解为不可约表示 $D_1',D_2',\cdots,D_k'$ 的直和：

$$D=D_1\times D_2=D_1'+D_2'+\cdots+D_k'.$$

实际上权矢量分开后，表示空间自然就分成相应的不可约表示空间的直和.

用这样的方法来实现表示的直乘按直和分解是群论中的普遍的标准的方法，这样作总是作得通的. 但是针对具体的群，这个作法往往是相当繁的. 实际处理问题时，常根据所处理群的特点，采取特殊的方法来简捷地处理，这种方法，由于是根据不同情况提出来的，所以不能写成普通形式，但是这种方法往往比用标准方法简化得多，这是值得注意的一点.

§4.4 基础表示和基本表示

1. 基础(basic)表示

考虑两个不可约表示 D_1 和 D_2 的直乘 $D=D_1\times D_2$，D 的权可表为 D_1 和 D_2 的权 $\Lambda^{(1)}$ 和 $\Lambda^{(2)}$ 之和 $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$. 由于 D 一般

是可约表示，它可表为不可约表示的直和．对于 D_1 和 D_2 的最高权 $\Lambda_h^{(1)}$ 和 $\Lambda_h^{(2)}$，可以给出 $\Lambda_h=\Lambda_h^{(1)}+\Lambda_h^{(2)}$，它应是 D 中一个不可约表示的最高权．

如果有一个不可约表示 D，它的最高权 Λ_h 不可能表成另两个不可约表示 D_1 和 D_2 的最高权 $\Lambda_h^{(1)}$ 和 $\Lambda_h^{(2)}$ 之和，则表示 D 称为基础表示．

要强调的是，这并不是说基础表示不能通过其它表示的直乘分解得来，两个表示直乘的分解可能给出基础表示，但其最高权不能等于该两个直乘表示的最高权之和．

秩为 l 的群有 l 个基础表示，按照定义，基础表示的最高权应是数值最小的．l 个基础表示可以写作

$$\left.\begin{array}{c}(1,0,0,\cdots,0)\\(0,1,0,\cdots,0)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(0,0,0,\cdots,1)\end{array}\right\} l\text{ 个}.$$

它们与 Dynkin 图上的 l 个点相对应．

例如：A_3 群的基础表示可通过 Dynkin 图表为图 4.1 所示．

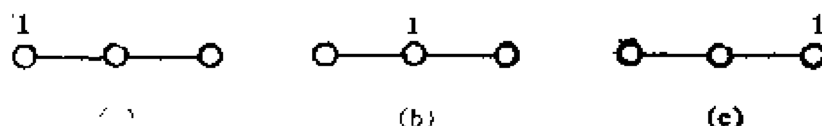


图 4.1　A_3 群基础表示的 Dynkin 图

对称表示和反对称表示：

由 k 个基础表示完全对称组成的表示称为对称表示，用 $D^{(k)}$ 来代表．

由 k 个基础表示完全反对称组成的表示称为反对称表示，用 $D^{[k]}$ 来代表．

(1)　如果基础表示为 n 维表示，n 个 $|\Lambda_i\rangle$ 是对应 Λ_i 的正则

基，则 $D^{(1^k)}$表示的权为

$$\Lambda_{i_1}+\Lambda_{i_2}+\cdots+\Lambda_{i_k}\quad(i_k>\cdots>i_2>i_1).$$

最高权为

$$\Lambda_1+\Lambda_2+\cdots+\Lambda_k,$$

表示的维数为$\binom{n}{k}$.

(2) 如果基础表示为 n 维表示，n 个$|\Lambda_i\rangle$是对应 Λ_i 的正则基，则 $D^{(k)}$表示的权为

$$\Lambda_{i_1}+\Lambda_{i_2}+\cdots\cdots+\Lambda_{i_k},\quad(i_k\geqslant\cdots\geqslant i_2\geqslant i_1).$$

最高权为 $$k\Lambda_k,$$

表示的维数为$\binom{n+k-1}{k}$.

比较上面两种情形可以看出：对称表示的最高权为 k 个最高权 Λ_k 相加；但是反对称表示的最高权则不能取相同的权相加.

例：$SU(3)$群的一个基础表示为 $D(1,0)$，它是 3 维表示，其 Dynkin 图如图 4.2 所示. 利用 $D(1,0)$ 得到的对称和反对称表示为

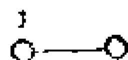


图 4.2 A_2 群基础表示 $D(1,0)$的 Dynkin 图

$$D^{(2)}=D(2,0),\text{维数}=6,$$
$$D^{(1^2)}=D(0,1),\text{维数}=3.$$

2. 基本(elementary)表示

在 A_3 的图 4.1 所示的三个基础表示中，只有 (a)和(c)两个表示是基本表示. 也就是说，通过 Dynkin 图连接起来的终端是1的表示就是基本表示. 这里的终端是指分支的终端. 那么，什么是分支呢？满足下面几点的有方向的连线就是一个分支：

(1) 分支的起点只和后面一点连接；分支中的点只和前后两点相连接.

(2) $i \longrightarrow i+1$ 的连线只有三种形式，如图 4.3 所示. 图中(c)那种连线连接后分支就不再继续.

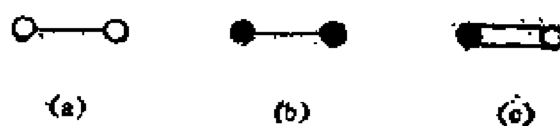


图 4.3 连线的三种形式

(3) 不能再加一点而不破坏上列两条.

根据这些要求，利用 Dynkin 图定出各单纯李群的分支分布如图 4.4 所示.

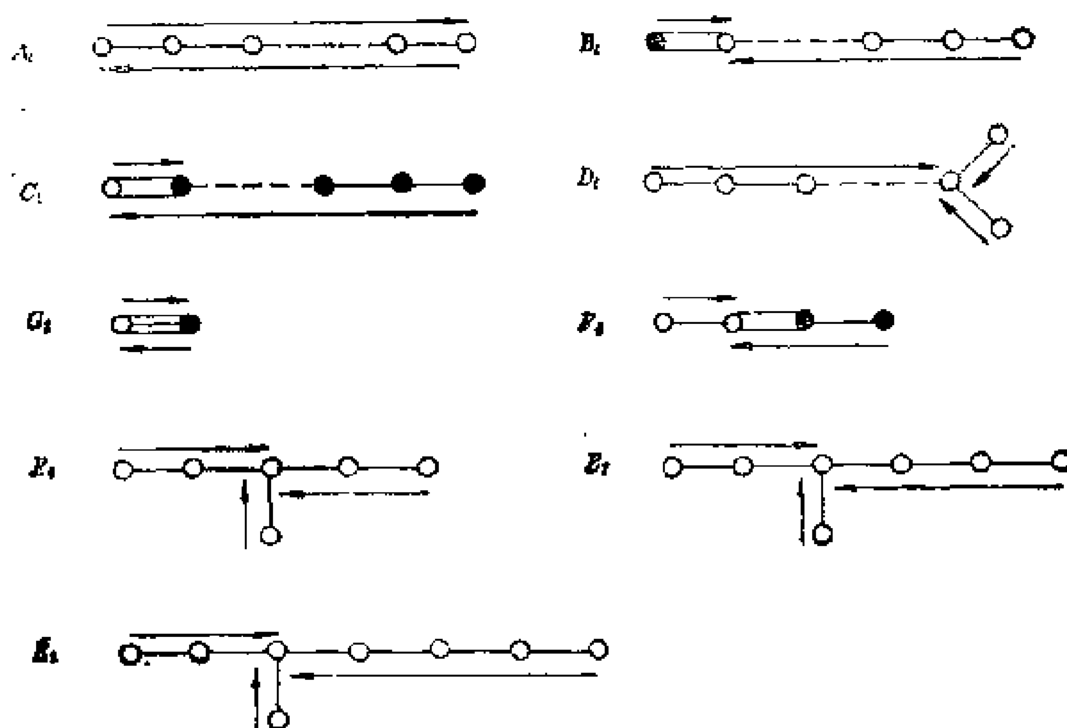


图 4.4 单纯李群的分支分布

对于每一条分支，可以按顺序给出单根的序列 $\alpha=\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_k$. 对于 $r=1, \cdots, k$, 有

$$D_{\alpha_r} \sim D^{(1^r)}$$

这也就是说：有了一个分支后，从分支的起点（即终端）出发，作该点所代表的基本表示的反对称表示，作 r 阶反对称表示得到的就是沿分支走到第 r 个点所代表的基础表示。

例如：$A_4 = SU(5)$ 从图 4.5(a) 出发沿着一个分支立即得 $D^{(1^2)}$，$D^{(1^3)}$，$D^{(1^4)}$，如图 4.5(b) 所示。

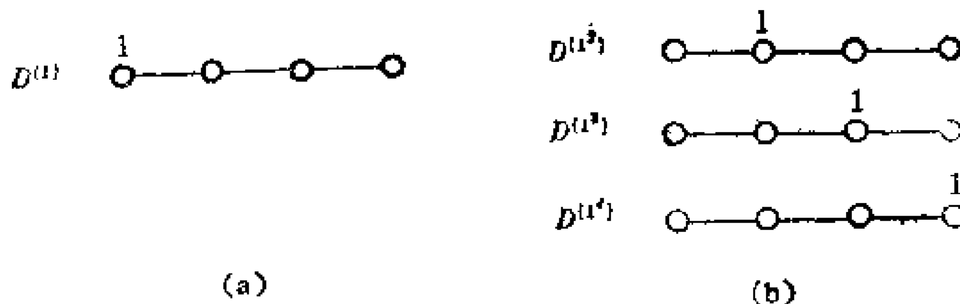


图 4.5　A_4 分支给出的单根序列

§4.5　Wigner-Eckart 定理

在群论的计算中，经常要用到 Wigner-Eckart 定理. 这个定理在各种群论书中都有详细的介绍，在此只作简单的叙述.

考虑在一个表示中，有一个矢量记为 $|\Lambda_1, \lambda_1\rangle$，其中 Λ_1 标记表示，λ_1 标记表示中的矢量. $T(\Lambda, \lambda)$ 为另一个量，它的变换性质相当于表示 Λ 中以 λ 标记的矢量. 这样 $T(\Lambda, \lambda)|\Lambda_1, \lambda_1\rangle$ 的变换性质实际上是表示 Λ 和 Λ_1 的直乘，它是一个可约表示，即可表为不可约表示的直和，如果从中选取以 Λ_2 标记的表示中 λ_2 矢量分量，则需要计算 $\langle \Lambda_2\lambda_2 | T(\Lambda, \lambda) | \Lambda_1, \lambda_1\rangle$.

Wigner-Echart 定理：

$$\begin{aligned}
&\langle \Lambda_2\lambda_2 | T(\Lambda, \lambda) | \Lambda_1, \lambda_1\rangle \\
&= \langle \Lambda_2\lambda_2 | \Lambda\lambda\Lambda_1\lambda_1\rangle \langle \Lambda_2 \| T(\Lambda) \| \Lambda_1\rangle \\
&= \langle \Lambda_2\lambda_2 | \Lambda\lambda\Lambda_1\rangle \langle \Lambda_2 \| T(\Lambda) \| \Lambda_1\rangle
\end{aligned}$$

其中$\langle \Lambda_2\lambda_2; \Lambda\lambda\Lambda_1\rangle$是 Clebsch-Gordon 系数，它的大小取决于$\Lambda_2, \lambda_2, \Lambda, \lambda, \Lambda_1, \lambda_1$，只有在 $\Lambda\lambda$ 和 $\Lambda_1\lambda_1$ 直乘中包含 $\Lambda_2\lambda_2$ 时才不为零. $\langle \Lambda_2 \| T(\Lambda) \| \Lambda_1\rangle$称为约化矩阵元，它与$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$无关只取决于表示 $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$. 因此表示中不同矢量的差异只反映在 Clebsch-Gordon 系数上.

第五章　整体对称性

§5.1　李群及其表示

如果有一个李群 G，它相应的李代数为 A(即 G 的生成元 X_i 满足李代数 A)，则李代数为实李代数．群元素可通过群参数 α^i 表为

$$g(\alpha)=e^{\alpha^i X_i}.$$

如果李群有一个不可约表示 D，则 X_i 的表示为矩阵 Y_i，Y_i 对矩阵乘法来说满足与 X_i 相同的实李代数关系．对于 D 表示空间的一个矢量 Φ，生成元 X_i 对 Φ 的运算由

$$[X_i,\Phi]=Y_i\Phi$$

给出，其中等式左边是抽象的代数运算，右边是矩阵乘法．相应地，群元素 $g(\alpha)$ 对 Φ 的变换由下式给出：

$$\begin{aligned}g(\alpha)\Phi(g(\alpha))^{-1}&=e^{\alpha^i X_i}\Phi e^{-\alpha^i X_i}\\&=e^{\alpha^i Y_i}\Phi.\end{aligned}$$

和上面类似，这个等式中涉及 X_i 的都是抽象的代数运算，但表成 Y_i 时则是具体的矩阵乘法．这样给出的结果自动保证群的乘法对应表示矩阵的乘法，亦即保证群表示的要求自动满足．

这些都是前面已经讨论过的．现在我们研究物理上最常见的单纯紧致连通李群，它的所有有限维不可约表示都是幺正表示 $D^+=D^{-1}$．这表明

$$e^{\alpha^i Y_i^+}=e^{-\alpha^i Y_i}$$

即 $Y_i^+=-Y_i$，Y_i 为反厄米矩阵．这样共轭表示 $[D^+]^{-1}=D$ 实际上就是 D 本身，没有特殊的意义．但这时复共轭表示还是有意义

的，因为Y_i^*与Y_i满足相同的代数关系．群元素对应于

$$e^{\alpha^i Y_{i*}}=e^{-\alpha^i \tilde{Y}_i}$$

考虑D^*表示中的一个矢量Ψ^*，在群变换下变为

$$e^{-\alpha^i \tilde{Y}_i}\Psi^*$$

如果将它在线性表示空间中作矩阵的转置，则得

$$\Psi^+ e^{-\alpha^i Y_i}$$

这时群元素的作用变为从右边去乘，同时群元素对应的矩阵也由$e^{+\alpha^i Y_i}$换为$e^{-\alpha^i Y_i}$．在这样了解下，它也称为D的共轭表示并用D^+表示．

现在我们看D^+表示中一个矢量Ψ^+和D表示中的一个矢量Φ按矩阵乘法的内积$\Psi^+\Phi$．如果对这个量用群元素$g(\alpha)$去变换

$$\begin{aligned}
&g(\alpha)\Psi^+\Phi(g(\alpha))^{-1}\\
&=g(\alpha)\Psi^+(g(\alpha))^{-1}g(\alpha)\Phi(g(\alpha))^{-1}\\
&=\Psi^+ e^{-\alpha^i Y_i}e^{\alpha^i Y_i}\Phi\\
&=\Psi^+\Phi.
\end{aligned}$$

这表明$\Psi^+\Phi$在群元素变换下是不变的，亦即$\Psi^+\Phi$在群变换下是不变量．这个性质非常重要，它表明如果D是一个n维不可约表示，则群元素对应于对n维空间列矢量的线性变换矩阵，而在新意义下定义的D的共轭表示D^+中，群元素对应于对n维空间行矢量的线性变换矩阵，并且如果在D中$g(\alpha)$对应地用$e^{\alpha^i Y_i}$矩阵描写，则在D^+中$g(\alpha)$对应地用$e^{-\alpha^i Y_i}$矩阵描写．

由此可见，对于任何有限维不可约表示D，总可找到共轭表示D^+，它们可以统一地用一个n维表示空间来描写，只是要注意D对应于对列矢量的变换，D^+对应于对行矢量的变换，两者变换式的联系相当于取厄米共轭．

为了在物理上讨论方便，我们在以下的讨论中将生成元 X_i 换为 I_i，相应地表示矩阵 Y_i 换为 L_i. 根据前面讨论的结果，对于紧致半单纯李群，总可作到采用反对称结构常数来表达李代数：

$$[I_i, I_j] = iC_{ijk}I_k,$$

这是抽象的代数关系. 对于表示 D 有

$$[L_i, L_j] = iC_{ijk}I_k,$$

这是具体的矩阵乘法等式，L_i 为 I_i 的表示矩阵. 由于 Y_i 是反厄米矩阵，L_i 是厄米矩阵，群元素 $g(\alpha)$ 的表示矩阵变为

$$e^{i\alpha^i L_i}.$$

在应用物理中研究的许多矩阵群具有幺模的性质，即要求

$$\det e^{i\alpha^i L_i} = 1$$

利用 $\det e^{i\alpha^i L_i} = e^{\mathrm{Tr}(i\alpha^i L_i)}$，得到幺模条件相当于对生成元的矩阵表示有

$$\mathrm{Tr}(L_i) = 0,$$

由于 L_i 是表示矩阵，与 I_i 不同，L_i 除满足与 I_i 同样的李代数关系外，还可以作其它矩阵运算. 考察生成元 I_i 在某一表示中的表示矩阵 L_i 所构成的量

$$T_{ij} = \mathrm{Tr}(L_i L_j),$$

它是一个与 i, j 有关的量，具有性质

$$T_{ij} = T_{ji},$$

在基底变换下其变换规律与 g_{ij} 相同. 可以利用适当的正交变换把 T_{ij} 对角化，即表为

$$T_{ij} = T(i)\delta_{ij}.$$

由于 Killing 度规 g_{ij} 原来已是正比于 δ_{ij} 的形式，在正交变换下不变.

利用 L_i 满足的代数关系立刻得

$$\mathrm{Tr}(L_iL_jL_k)-\mathrm{Tr}(L_jL_iL_k)=iC_{ijk}T(k).$$

等式左边对i，j，k是完全反对称的，等式右边的C_{ijk}对i，j，k也是完全反对称的，从而$T(k)$应当与k无关，对于给定的表示是一个常数．但T的值应随表示不同而不同，故可记作$T(L)$．

再对生成元作标度变换，即作变换

$$I_i'=\lambda I_i,$$

则相应地$T(L')=\lambda^2T(L)$，适当选取λ的值使对最低维非显然表示$T(L)=\frac{1}{2}$．在这种定义下，对于任何给定的表示，不论哪个生成元对应的表示，矩阵平方后求阵迹都得到同一个数，这样在处理问题时是很方便的．

利用这个性质，立刻可得

$$C_{ijk}=\frac{1}{iT(L)}[\mathrm{Tr}(L_iL_jL_k)-\mathrm{Tr}(L_jL_iL_k)],$$

等式两边对i,j,k都是反对称的，这是合理的．等式左边是反对称结构常数，它是由群决定的，与表示无关．而等式右边，分子和分母都与表示有关，但其商也应与表示无关．

为了进一步确定$T(L)$的值，从上式出发，令$i=j$求和，这样因$\delta_{ii}=m$为群的维数，得

$$T(L)=\frac{1}{m}\mathrm{Tr}(L_iL_i).$$

在上面作生成元标度变换时，一般说来会使二阶 Casimir 算符不再简单地等于I_iI_i，而要差一个常数倍，即

$$C=gI_iI_i.$$

然而在许多实际应用中，为了简便，常重新定义二阶 Casimir 算符为

$$C=I_iI_i,$$

这样$T(L)$又可表为

$$T(L)=\frac{n}{m}C(L),$$

其中 n 为表示的维数，$C(L)$ 为二阶 Casimir 算子在这表示中的本征值. 这个结果将 $T(L)$ 和 Casimir 算子的本征值联系起来了.

例如对最低维非显然表示，$T(L)=1/2$，由此得

$$C(L)=\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2},$$

特别是例如对子 $SU(N)$ 群，$m=N^2-1, n=N$，得

$$C(L)=\frac{N^2-1}{2N}.$$

§5.2 对称性和守恒定律

无论什么样的对称现象，都是与把两种不同的情况相比较分不开的. 如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有该变换所对应的对称性. 可以根据变换所涉及的对象以及变换的性质来对对称性进行分类. 对空间性质进行变换所对应的对称性统称为空间对称性；对时间性质进行变换所对应的对称性统称为时间对称性. 空间对称性和时间对称性是最基本、最常见的对称性，但并不是所有的对称性都能归入这两类对称性之中. 各种物体的性质及其运动的不同，还体现在一些与空间和时间的描述相独立的其它性质上. 物理学中把通过与空间和时间相独立的其它性质的变换所体现的对称性称为内部对称性.

考察物理学运动规律在群 G 的变换下的行为，从物理上来说，群 G 的元素反映某种变换. 如果有场量 Φ，在 G 的元素 g 的变换下的变换记作 $g\Phi g^{-1}$，要把它明显地写出来需要知道在群 G 的变换下 Φ 按什么表示的基变换，亦即通常所谓 Φ 属于什么表示. 在明确 Φ 是某表示的基后，变换可写作

$$g\Phi g^{-1}=e^{i\alpha^i I_i}\Phi e^{-i\alpha^i I_i}$$

$$= e^{i\alpha^i L_i}\Phi,$$

其中 L_i 是生成元 I_i 在该表示中的表示矩阵.

如果理论中涉及多种场量 Φ, Ψ 和 A_μ，则群元素 g 对它们的变换应分别为

$$g\Phi g^{-1} = e^{i\alpha^i L_i}\Phi,$$

$$g\Psi g^{-1} = e^{i\alpha^i L_i'}\Psi,$$

$$gA_\mu g^{-1} = e^{i\alpha^i L_i''}A_\mu,$$

由于 L_i 是生成元 I_i 在表示 D 中的表示矩阵，因此对于不同的表示空间，I_i 的表示矩阵分别为 L_i, L_i', L_i''.

例如费米场 Ψ 和赝标场 Φ 的耦合 $\bar{\Psi}\Phi\gamma_5\Psi$，用 g 作用得

$$g\overline{\Psi}\Phi\gamma_5\Psi g^{-1} = g\overline{\Psi}g^{-1}g\Phi g^{-1}g\gamma_5\Psi g^{-1}$$

$$= \overline{\Psi}e^{-i\alpha^i L_i'}e^{i\alpha^i L_i}\Phi\gamma_5 e^{i\alpha^i L_i'}\Psi,$$

如果这个相互作用在群 G 的变换下不变，亦即在群 G 的任一元素 g 作用下 $\bar{\Psi}\Phi\gamma_5\Psi$ 应保持不变，上式应仍能化为 $\bar{\Psi}\Phi\gamma_5\Psi$. 这就需要利用表示直乘的方法，使这三个指数矩阵的合效果互相抵消，将这三个矩阵的表示合成一个一维表示.

守恒定律与物理学运动规律在一定的变换下的不变性有密切联系，这方面探索的一个重要进展是建立了 Noether 定理，这个定理首先是在经典物理学中给出的，后来推广到量子物理范围内也普遍证明了.

Noether 定理：如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，必相应存在一个守恒定律.

描述系统所处的状态常需要许多参量，例如系统所处的时间，对应系统各自由度的量(系统质心的空间坐标、对标准参考系的转角等). 此外，为反映微观粒子内部属性，还有一些类似的量，例如同位旋空间的方位角等内部自由度. 一般说来，这种描述系统运动状态的量称为运动参量. 对于一个连续变换，总可通过引入一

个连续变化的运动参量 ξ 来描写. 一般说来,哈密顿量 H 是 ξ 的函数 $H(\xi)$. 如果运动规律在这变换下不变,则应有

$$H(\xi+d\xi)=H(\xi)$$

由此可以给出

$$P_\xi=-i\frac{\partial}{\partial\xi},$$

这是一个与哈密顿量 H 对易的厄米算符,亦即 P_ξ 是一个守恒量.

分立变换不能用一个运动参量的连续变化来描写, 因此应该直接讨论分立变换本身. 如果在分立变换 U 下,哈密顿量 H 不变,即

$$UHU^{-1}=H,$$

由此给出

$$UH=HU,$$

立即可以得到 U 本身就是一个守恒量.

根据 Noether 定理, 可以用运动规律所满足的对称性来对相应的守恒量进行分类. 如果对称性是属于场和粒子的时空性质的某种变换, 称为时空对称性, 相应的守恒量称为时空对称性守恒量. 例如,时间平移不变性决定能量守恒;空间平移不变性决定动量守恒; 空间转动不变性决定角动量守恒; 空间反射不变性决定 P 宇称守恒, 这些都是时空对称性守恒量. 时间反演变换 T 本身是直接施于时间的, 运动规律满足时间反演变换不变性并不表明存在相应的守恒定律和守恒量. 在经典物理学中, 主要涉及连续变换对称性, 并且这些变换往往直接和现实时空相联系. 在量子物理学中, 连续变换扩充到可以是独立于时空的抽象复空间中的变换, 同时还涉及许多分立变换的对称性. 如果对称性是属于场和粒子的独立于时空性质的某种变换, 则称为内部对称性, 相应的守恒量称为内部对称性守恒量. 电荷,同位旋,奇异数,粲数,底

数，重子数，轻子数，C 宇称，G 宇称等都属于内部对称性守恒量.

§5.3 群的不变性和守恒定律

按照 Noether 定理，每一个保持运动规律不变的变换都决定对应存在一个守恒量.连续变换不变性所给出的是相加性守恒量；分立变换不变性所给出的是相乘性守恒量.

现在需要考察的是：如果一个变换是某一个变换群的元素，运动规律不仅对这一个特定的变换，而且对这个变换群中一切元素所代表的变换都是不变的时候，相应的守恒量具有什么性质.

考察一个李群 G，它的元素可普遍表为

$$g = e^{i\alpha^i I_i}, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

如果运动规律对李群 G 中一切元素所代表的变换都是不变的，则

$$P_i = -i\frac{\partial}{\partial\alpha^i},$$

是对应 α^i 的守恒量. 利用上面关于群元素的普遍表达式，立即可以得到

$$P_i = I_i.$$

我们看一个例子，如果运动规律在绕空间某一轴的转动下不变，则角动量在这轴上的投影是守恒量；如果运动规律在绕空间某一点的转动下不变，则角动量在过这点的任意轴上的投影都是守恒量. 这样似乎有无穷多个守恒量，然而实际上独立的只有三个，可以取作角动量沿某一直角坐标架三个轴的投影，角动量沿任一轴的投影都可以表成它们的线性组合. 从数学上看，这是因为绕空间某一点的转动构成一个三维转动群，即 $SO(3)$群. 这个群中的任一元素，即绕空间任一轴的转动，都可以通过一组三个

参数来描写，从而决定了存在且只存在三个互相独立的守恒量——$SO(3)$ 群的生成元，即角动量沿某一直角坐标架三个轴的投影.

一般说来，如果运动规律在某一李群 G 变换下不变，群 G 的维数为 m，即群 G 中任意元素都对应 m 个群参数的一组值．则对应 m 个群参数 ξ_i, $i=1,\cdots,m$，将有 m 个守恒量 I_i，又称守恒荷．值得注意的是，守恒荷的个数等于生成元的个数，守恒荷与生成元是一一对应的，同时守恒荷既与具体表示无关又与时空坐标无关，它们之间满足与生成元相同的李代数关系．因此这些守恒荷与生成元在数学上同构，实际上就是生成元在理论中的具体形式．正因为如此我们都用 I_i 来标记.

如果拉氏量

$$\int \mathscr{L}(\Phi,\partial\Phi)d^4x$$

在李群的变换下不变，则

$$\delta\mathscr{L}(\Phi,\partial\Phi)=0,$$

亦即

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi}\partial\Phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\partial_\mu\Phi=0,$$

利用运动方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi}=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right),$$

可以得到普遍的流守恒方程

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi\right)=0,$$

再利用

$$g\Phi g^{-1}=e^{i\alpha^iL_i}\Phi,$$

得到场量的变分为

$$\delta\Phi = iL_i\Phi\delta\alpha^i,$$

代入后得到对应m个群参量的m个流守恒方程:

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0, \qquad i=1,2,\cdots,m.$$

其中

$$J_i^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}L_i\Phi.$$

独立守恒流的个数等于群的维数m. 如果理论中有多个场量Φ, Ψ, $\cdots$, 则守恒流可表为

$$J_i^\mu = J_i^\mu(\Phi) + J_i^\mu(\Psi) + \cdots,$$

即等于对应各场量所得的守恒流之和。

从流守恒方程对全空间积分，可以推出存在m个独立的守恒量:

$$I_i = \int J_i^0 d^3x, \qquad i=1,2,\cdots m.$$

称为流J_i的荷。

守恒荷满足李代数关系的基础是守恒流之间的代数关系，在这些代数关系的基础上发展了流代数的理论.

如果考虑的是秩为l的m阶李群变换的不变性，则虽然要求有m个守恒荷存在，但在其中只有l个可以互相对易，即在量子理论中只有l个可以同时测量. 例如对于三维空间转动不变性，需要用$SO(3)$群描写，生成元即角动量的三个分量，它们都是守恒荷. 但由于$SO(3)$群的秩$l=1$，可以同时测量的只是其中之一.

如果运动规律在某一分立群G变换下不变，则群G的每一个元素都是守恒量. 群G的单位元是显然的守恒量，它对任何系统的本征值都是$+1$，作为一个相乘性守恒量，在物理上不带来任何使人感兴趣的后果. 因此如果群G共有n个元素，则有$n-1$个物理上有意义的守恒量，然而只有相互对易的守恒量才可以同时

测量.

粒子物理学中最常见的分立对称群是二阶循环群，它除了单位元之外只有一个元素U,并满足$U^2=1$. 因此每一个这类对称群只提供一个物理上感兴趣的相乘性守恒量，例如P宇称、C宇称都是这样的守恒量.

如果运动规律在两个群G和G'变换下分别都是不变的，且G和G'都是分立群，则由群G和G'生成的群G''也是一个分立群，并且运动规律在群G''变换下也是不变的. 群G''的元素由群G和G'的元素相乘组成，是一个复合的守恒量. 在强相互作用和电磁相互作用下,C宇称和P宇称都是守恒的,CP宇称也是守恒的,CP宇称就是一个复合守恒量.

如果运动规律在两个群G和G'变换下分别都是不变的，其中G是某种内部对称性的连续群,G'是分立群,则运动规律在G和G'生成的群G''变换下也是不变的.

值得注意的是，当内部对称性的连续群G和分立群G'的元素互相对易时，在连续群G变换下的不变性对分立群G'变换不变性所给出的守恒量的影响. 令I是G的一个生成元，从而是一个相加性守恒量;U是G'的一个元素，从而是一个相乘性守恒量；由于I和U对易，从而可以同时测量. 我们可以重新定义一个新的分立变换U'为

$$U'=Ue^{i\alpha I}$$

其中α是一个实常数. 这样定义的U'仍是一个守恒量.

如果对任一系统守恒量U宇称的值是利用其守恒性质从实验中总结出来的，则上面给出的U和U'都满足同样的守恒性要求. 换言之，如果已经定出各粒子和粒子组成的系统的U值，我们也可以重新定义U宇称为上式给出的U'值，所有物理上的守恒要求都仍然满足. 从这个意义上说，U宇称定义为U值还是U'值是

等价的，这个等价性成立的条件是：对于U守恒的相互作用来说，I是相加性守恒量．当然，如果I是相加性严格守恒量，这个等价性当然成立．在粒子物理学中，实际上存在许多互相对易的内部相加性守恒量，如电荷、重子数、轻子数等，这就是许多种相乘性守恒量的定义上都可能具有这种很大的不确定性．这种不确定性称为宇称的相对性(这里“宇称”是相乘性守恒量的统称，不仅限于空间反射变换所定义的P宇称)，P宇称就具有这种相对性．

如果一个系统，其所有内部相加性守恒量都等于零，则称为Majorana系统或纯中性系统．对于纯中性系统，$U=U'$，亦即宇称的不同定义给出相同的值．这表明：纯中性系统具有绝对的宇称值．

为了去除宇称的相对性带来的不确定性，粒子物理学中针对各种不同的相加性守恒量，作一些共同的约定．

§5.4 整体对称性和质量

整体对称性是相对于定域对称性而来的．考虑李群G所描述的变换，如果群参数不随时空点而变化，则称整体变换，如果群参数是时空点的函数则称定域变换．这两种情形所描述的对称性(即不变性)分别称为整体对称性和定域对称性．

考虑在李群G所描述的整体对称性对粒子质量的约束．先看玻色子的情形，如果玻色子场量Φ构成某一n维表示的基，则$\Phi^+\Phi$在群G的变换下是不变的．这样拉氏量中就允许存在$m^2\Phi^+\Phi$项，其中m是一个常数．由于

$$m^2\Phi^+\Phi=m^2\sum_{k=1}^{n}\phi_k^*\phi_k,$$

拉氏量中出现这项，说明Φ的n个分量和Φ^+的n个分量实际上描写了$2n$个玻色子．在李群G的变换下$\mathscr{L}$不变要求这$2n$个玻色

子的质量相同，即都是 m.

如果玻色子场量 ϕ 构成某一 n 维自共轭表示 Φ 的基，则

$$\sum_{k=1}^{n}\phi_k^2$$

在群 G 的变换下是不变的．这样在拉氏量中就允许存在

$$\frac{1}{2}m^2\sum_{k=1}^{n}\phi_k^2$$

的项．这说明 Φ 的 n 个分量实际上描写了 n 个玻色子，它们的质量相同，都是 m.

对于费米子，讨论要复杂些．将费米场 Ψ 按手征性质分开：

$$\Psi=\Psi_L+\Psi_R,$$

$$\Psi_L=P_+\Psi,\quad \Psi_R=P_-\Psi,$$

$$P_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5),$$

Ψ_L 和 Ψ_R 分别称为 Ψ 的左旋和右旋分量．对上式取厄米共轭，再乘 γ_4 则得

$$\overline{\Psi}=\overline{\Psi}_L+\overline{\Psi}_R,$$

$$\overline{\Psi}_L=\overline{\Psi}P_-,\quad \overline{\Psi}_R=\overline{\Psi}P_+,$$

由于手征投影算子 $P_\pm$ 具有性质

$$P_+^2=P_+,\quad P_-^2=P_-,\quad P_+P_-=P_-P_+=0,$$

这样有

$$\overline{\Psi}\Psi=\overline{\Psi}_L\Psi_R+\overline{\Psi}_R\Psi_L.$$

费米子有质量反映为在拉氏量 $\mathscr{L}$ 中应出现形如

$$m\overline{\Psi}\Psi=m(\overline{\Psi}_L\Psi_R+\overline{\Psi}_R\Psi_L)$$

的项，从 Feynman 图来看，质量项的物理意义是左旋分量消灭，右旋分量产生，或右旋分量消灭，左旋分量产生，对比玻色子质量项 $m^2\Phi^+\Phi$，则并没有左旋和右旋的区分，即使考虑了玻色子的自旋

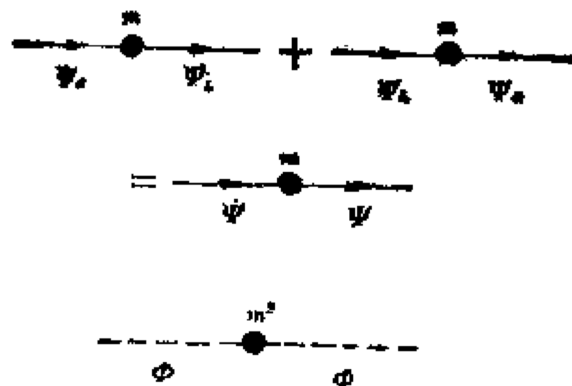


图 5.1　质量项的 Feynman 图

也没有像费米子那样的手征性质的改变.

如果费米子构成李群 G 的 n 维表示，则它有 n 个独立分量，在拉氏量中质量项应为

$$m\sum_{k=1}^{n}\bar{\psi}_k\psi_k=m\sum_{k=1}^{n}(\bar{\psi}_{Lk}\psi_{Rk}+\bar{\psi}_{Rk}\psi_{Lk}).$$

值得注意的是，任何一个连续变换都不可能把 Ψ_L 变为 Ψ_R，因此在李群的变换下，Ψ_L 和 Ψ_R 可以各自按不同的表示变换. 换言之，一般说来，Ψ_L 构成李群 G 的一个表示 D，Ψ_R 构成李群 G 的另一个表示 D'，D 和 D' 不一定相同，但是如果拉氏量中出现质量项，为保证质量项在李群 G 变换下不变，就必须 D 和 D' 表示相同，这时费米子各分量具有相同的质量. 这就表明，如果费米子的左旋分量与右旋分量构成的表示不同，则费米子得不到质量.

如果要建立一个理论，除了使费米子质量为零外，并不带来其它更多的影响，最直接的办法是引入一个整体对称性，在其中左旋费米子和右旋费米子属于不同表示.

最简单的作法是引入整体手征 $U(1)$ 群，例如引入整体左手 $U(1)$ 群，它的表示总是一维的，对费米子来说变换群元素为 $e^{i\alpha P_L}$，即变换为

$$\Psi \longrightarrow e^{i\alpha P_+}\Psi,$$

对于左旋分量和右旋分量分别写出有

$$\Psi_L \longrightarrow e^{i\alpha P_+}\Psi_L = e^{i\alpha}\Psi_L$$

$$\Psi_R \longrightarrow e^{i\alpha P_+}\Psi_R = \Psi_R$$

即在这个 $U(1)$ 群下，左旋费米子对应量子数为 1 的表示，而右旋费米子对应量子数为 0 的表示．这个左手 $U(1)$ 群通常记作 $U(1)_L$.

同样可定义右手 $U(1)$群，它对费米子的变换元素为 $e^{i\alpha P_-}$，即左旋费米子表示的量子数为零，而右旋费米子表示的量子数为 1. 这个右手 $U(1)$群通常记作 $U(1)_R$.

为了达到使费米子质量为零的目的，有时引入整体 $\gamma_5 U(1)$ 群，它是在手征 $U(1)$群基础上给出的，对费米子的变换为

$$\Psi \longrightarrow g\Psi g^{-1} = e^{i\alpha\gamma_5}\Psi,$$

对左旋和右旋分量分别表现为

$$\Psi_L \longrightarrow g\Psi_L g^{-1} = e^{i\alpha}\Psi_L,$$

$$\Psi_R \longrightarrow g\Psi_R g^{-1} = e^{-i\alpha}\Psi_R,$$

即左旋分量量子数为 1，而右旋分量量子数为 -1.

引入这三种类型的整体 $U(1)$变换，都可以使左旋和右旋费米子具有不同的 $U(1)$量子数，即属于不同的表示，从而使费米子不能具有质量.

§5.5 手征对称性和螺旋性混合表象

在上一节中，我们讨论了整体对称性对玻色子的质量并没有加特殊的限制，只是要求属同一表示的诸玻色子质量相同．对于费米子，由于质量项表现为不同螺旋度的费米子场的耦合，而左旋费米子和右旋费米子可以属于不同表示，因此就得出费米子有质量的必要条件是左旋费米子和右旋费米子必须属于相同的表示

(并不是指同一个表示，而是指相同变换性质的表示)。

上面我们还讨论了 $U(1)$ 对称性对费米子质量的限制，讨论了四种典型的 $U(1)$ 对称性，结果如表 5.1 所示。

表 5.1　四种典型的 $U(1)$ 对称性

	$U(1)$	$U(1)_L$	$U(1)_R$	$U(1)_{\gamma_5}$
群元素表示	$e^{i\alpha}$	$e^{i\alpha P_+}$	$e^{i\alpha P_-}$	$e^{i\alpha\gamma_5}$
Ψ_L 量子数	1	1	0	1
Ψ_R 量子数	1	0	1	-1
$m\bar{\Psi}\Psi$ 项	可以有	不能有	不能有	不能有

如果费米子满足的整体对称性高于 $U(1)$ 群，例如对称性为 $SU(N)$，则上述关于 $U(1)$ 群的讨论可以推广。对于 $SU(N)$ 群，在某一表示中生成元的表示矩阵 L_i 满足李代数关系：

$$[L_i, L_j] = iC_{ijk}L_k,$$

相应的群元素表示为 $e^{i\alpha^i L_i}$。

如果左旋费米子和右旋费米子按相同表示变换，则其变换可表为

$$\Psi \longrightarrow g\Psi g^{-1} = e^{i\alpha^i L_i}\Psi.$$

亦即

$$\Psi_L \longrightarrow e^{i\alpha^i L_i}\Psi_L,$$

$$\Psi_R \longrightarrow e^{i\alpha^i L_i}\Psi_R.$$

在这种情况下，显然费米子可以有质量，并且对同一表示各分量来说其质量应该相同。

如果将 $SU(N)$ 的李代数关系中的 L_i 一律换成 L_iP_+，由于 $P_+^2 = P_+$，这李代数关系仍然满足。这表明对费米子来说，可以存在这样的表象：

$$\psi \longrightarrow g\psi g^{-1} = e^{i\alpha^i L_i P_\pm}\Psi,$$

对于上面取 P_+ 的表示，按左旋和右旋分量写出为

$$\Psi_L \longrightarrow g\Psi_L g^{-1} = e^{i\alpha^i L_i}\Psi_L$$

$$\Psi_R \longrightarrow g\Psi_R g^{-1} = \Psi_R$$

即左旋按表示 D 变换，右旋按一维表示变换(即不变)．如果所有的费米子都按上面规则变换，则这个 $SU(N)$ 群可记作 $SU(N)_L$，称为 $SU(N)$ 左手手征对称性．同样地如上式中取 P_-，则得 $SU(N)$ 右手手征对称性 $SU(N)_R$．

与 $U(1)$ 群的情形对比可以看出，$SU(N)$ 与 $U(1)$ 对应，$SU(N)_L$ 与 $U(1)_L$ 对应，$SU(N)_R$ 与 $U(1)_R$ 对应．现在要问的是，对 $SU(N)$ 群是否可以找到与 $U(1)_{\gamma_5}$ 相应的对称性描写．

首先我们看到，如果作代换 $L_i \longrightarrow L_i\gamma_5$，则由于 $\gamma_5^2=1$，不再满足生成元的李代数关系，这表明这样简单地推广是不对的．

正确的推广可如下给出．由于对于 $SU(N)$ 群，生成元在任何表示中的表示矩阵 L_i 都是厄米矩阵，即 $L_i^\dagger = L_i$．可以将 L_i 分为两类：

(1) $L_i = L_i^*$ 即 L_i 为实的，这时 $L_i = \tilde{L}_i$；

(2) $L_i = -L_i^*$ 即 L_i 为虚的，这时 $L_i = -\tilde{L}_i$．

如果我们对生成元表示矩阵作下列代换：

当 $L_i = L_i^*$ 时，　$L_i \to L_i\epsilon$；

当 $L_i = -L_i^*$ 时，　$L_i \to L_i$，

则可以发现，只要 ϵ 满足 $\epsilon^2=1$，则生成元的李代数关系仍然满足．ϵ 应为独立于 $SU(N)$ 抽象空间的常数．对于费米子 ϵ 可以取 1，-1，γ_5 和 $-\gamma_5$．对于这四种情形，Ψ_L 和 Ψ_R 的变换性质及所属表示，以及相应的质量项在 $\mathscr{L}$ 中是否允许存在均列在表 5.2 中．对比之下，$\epsilon=1$ 和 $\epsilon=-1$ 的情形对应于原来 $U(1)$ 群的情形．$\epsilon=\gamma_5$ 和 $\epsilon=-\gamma_5$ 的情形相当于原来 $U(1)_{\gamma_5}$ 和 $U(1)_{-\gamma_5}$ 的推广．在 $U(1)_{\gamma_5}$ 的情形中，左旋费米子和右旋费米子的 $U(1)$ 量子数差

表 5.2

	$\epsilon=1$	$\epsilon=-1$	$\epsilon=\gamma_5$	$\epsilon=-\gamma_5$
Ψ_L 的变换	$e^{i\alpha^i L_i}$	$e^{-i\alpha^i L_i^*}$	$e^{i\alpha^i L_i}$	$e^{-i\alpha^i L_i^*}$
Ψ_R 的变换	$e^{i\alpha^i L_i}$	$e^{-i\alpha^i L_i^*}$	$e^{-i\alpha^i L_i^*}$	$e^{i\alpha^i L_i}$
Ψ_L所属表示	n	n^*	n	n^*
Ψ_R所属表示	n	n^*	n^*	n
$m\bar{\Psi}\Psi$ 项在 $\mathscr{L}$ 中	可以有	可以有	不能有	不能有

一个负号，亦即它们互为共轭表示．现在 $\epsilon=\gamma_5$ 和 $\epsilon=-\gamma_5$ 的情形中，由于 $SU(N)$群的表示不能简单用一个可加量子数来标志，左旋费米子和右旋费米子的表示之间的关系不能简单归结为某个量子数的符号改变，但同样可归结为互为共轭表示．

这种 $\epsilon=\gamma_5$ 和 $\epsilon=-\gamma_5$ 的 $SU(N)$ 群表示，称为螺旋性混合表象，它是 $U(1)$群的 γ_5 表象的推广．下面我们对于螺旋性混合表象的普遍性再作两点说明：

（1）对于 $SU(N)$群，上面介绍的只是螺旋性表象的一种引入方式．实际上引入螺旋性表象时，只要求：可以将 L_i 分为两组，对于 $C_{ijk}\neq 0$ 的李代数关系，第一组的 L_i 一律乘以 ϵ 之后，若 $\epsilon^2=1$，则李代数关系不变．

上面介绍的只是一种分组方式，即按 L_i 的实虚来分组．实际上还可以有其他类型的分组方式，每种分组方式都可引入 $\epsilon=1$，-1，γ_5，$-\gamma_5$ 来分别讨论其表示的性质，只不过上面所介绍的这种方式是最简单直接、物理意义也最容易看清的一种．

例如对于 $SU(3)$群，可以证明一共存在且只存在七种不同的引入方式．

（2）从上面的讨论也可以看出，螺旋性混合表象的引入不仅限于 $SU(N)$ 群．实际上手征对称性推广到任意李群是显然能作

到的，因为以 $L_iP_\pm$ 代替 L_i，总是能保持满足李代数关系的. 对于螺旋性混合表象，不论是什么李群，只要能够实现按上面所讲的分组，就可以建立一个螺旋性混合表象. 特别是如果李群是连通紧致单纯李群，则其有限维不可约表示都是幺正表示，如果 L_i 可按实和虚分成两组，则可按上面以 $SU(N)$ 为例所用的方法，立刻得到一个简单而意义直接的螺旋性混合表象.

第六章　强子的内禀对称性

§6.1　自旋和轨道角动量

空间的各向同性决定了场和粒子组成的孤立系统的运动规律在三维空间转动下具有不变性，这决定了孤立系统的总角动量守恒. 三维空间的转动保持任一点(x_1, x_2, x_3)与原点的距离平方

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_\mu x_\mu$$

不变，这样的变换可以用一个实三维欧氏空间的正交矩阵A来描写，所有的这样的变换构成一个实三维欧氏空间的正交变换群$O(3)$. 如果限于只考虑行列式

$$\det A=1$$

的变换，这相当于物理上只考虑纯转动，不考虑同时包含空间反射的变换，则所有的这样的变换构成一个实三维欧氏空间的幺模正交变换群$SO(3)$. 作为一个实三维空间的矩阵群，$SO(3)$群的生成元可用三维矩阵表为

$$I_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

用三维空间坐标表为

$$I_1=-i[x_2\partial_3-x_3\partial_2],$$
$$I_2=-i[x_3\partial_1-x_1\partial_3],$$
$$I_3=-i[x_1\partial_2-x_2\partial_1],$$

它们满足的李代数关系为

$$[I_1, I_2]=iI_3,$$

$$[I_2, I_3] = iI_1,$$
$$[I_3, I_1] = iI_2.$$

它们的物理含义是系统的轨道角动量，运动规律的 $SO(3)$ 不变性要求在运动过程中系统的总角动量守恒. 上面引入的实三维空间转动的描述以及生成元通过三维空间坐标的表述都反映了系统的总角动量，实际上指的是系统的总轨道角动量，并没有包括粒子还可以有自旋. 自旋是粒子的内禀角动量，但它不能通过粒子的坐标明显表述出来，亦即它不能简单地通过三维实空间的坐标描述. 考虑到粒子可以有自旋角动量作为粒子的内禀属性，它们与粒子的空间坐标无关，但它们的基本动力学性质和轨道角动量相同. 孤立系统的总角动量守恒实际是包括轨道角动量和自旋角动量在内的总角动量守恒，这时就应把变换群推广，保留生成元的基本李代数关系，不再限于必须要能通过实三维欧氏空间的正交变换明显地表示出来. 这样变换群变为复二维空间的幺模幺正变换群 $SU(2)$.

$SO(3)$ 群的基本表示是 3 维表示，所有的不可约表示都可以通过 3 维表示的直乘分解给出. Casimir 算符为

$$C_2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2,$$

其本征值为

$$C_2' = J(J+1), \quad J = 0, 1, 2, \cdots.$$

在给定 J 值的表示中，各分量 I_3 的可取值为

$$I_3 = J, J-1, \cdots, -J.$$

这反映了轨道角动量的量子数只能取整数值.

$SU(2)$ 群的基础表示是 2 维表示，所有的不可约表示都可以通过 2 维表示的直乘分解给出. 其不可约表示和 $SO(3)$ 群的差别在于 J 的可取值为

$$J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$$

这反映了考虑了自旋角动量之后，总角动量的量子数可以取整数值，也可以取半整数值.

$SO(2)$群的生成元在基本表示上的表示矩阵为

$$L_1=\frac{1}{2}\sigma_1,\quad L_2=\frac{1}{2}\sigma_2,\quad L_3=\frac{1}{2}\sigma_3,$$

其中

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

是 Pauli 矩阵，系统的总角动量是系统中各粒子的轨道角动量与自旋角动量之和. 角动量可以用标志该表示的量子数来标记，考虑两个角动量 J_1 与 J_2 之和时，就需要考虑这两个表示 $D(J_1)$和 $D(J_2)$直乘的分解:

$$\begin{aligned}&D(J_1)\otimes D(J_2)\\&=D(J_1+J_2)\oplus D(J_1+J_2-1)\oplus\cdots\oplus D(|J_1-J_2|),\end{aligned}$$

这就是熟知的角动量耦合规则.

粒子物理学中通常用 S 标志自旋角动量，用 L 标志轨道角动量，用 J 标志总角动量. 由于轨道角动量总是一个粒子相对另一个粒子的相对轨道角动量，由 n 个粒子组成的系统，其总角动量由 n 个粒子各自的自旋角动量和 n 个粒子之间的 $n-1$个相对轨道角动量之和组成.

§6.2 同 位 旋

1. 同位旋的引入

同位旋是粒子物理学中最早遇到的重要的内部对称性，这个概念首先是从实验的启示下提出的. 质子和中子的自旋相同，都是 $J=\frac{1}{2}$，质量相近，质子和中子的质量差为 $m_n-m_p=(1.293318\pm0.000009)$ MeV，这和质子的质量相比只有 0.00138，是一个很小

的数；质子和中子的电荷不同，质子带一个单位电荷而中子的电荷是零．质子和中子都有很强的强相互作用，这种强相互作用在10^{-15} m的尺度范围内比人们熟知的电磁作用要强2—3个数量级．质子和中子的强相互作用性质相似，但是电磁相互作用与弱相互作用性质不同．类似的情况还有π介子．实验上发现π介子有三种荷电状态π^+，π^0，π^-，它们的自旋都是0．$\pi^{\pm}$的质量为(139.5675 ± 0.0004)MeV，而π^0的质量为(134.9739 ± 0.0006) MeV，两者差仅为(4.5937 ± 0.0005)MeV．如果首先考察强相互作用，略去远比强相互作用弱，从而可以作为小的修正的其它几种相互作用，那么根据大量实验的总结，可以把质子p和中子n看作是同一种"核子"N的不同带电状态，把π^+，π^0，π^-看作是π介子的不同带电状态．这种情况可以和粒子的自旋来类比。电子的自旋是$\frac{1}{2}$，它在某一特定的z方向上的投影可以有$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$两个值；如果另一种粒子的自旋为1，则它在z方向的投影可以有$1,0,-1$三个值，自旋在z方向的投影取不同值是同一种粒子的不同运动状态．类似地也可以认为核子具有某种类似于自旋的"旋"，称为同位旋．自旋是和空间中的旋转对应的内禀角动量，用群论的语言来说，自旋角动量是由二维复空间幺模幺正变换的三个生成元所构成．类似地，同位旋也是和一种抽象复空间中幺模幺正变换的三个生成元对应的某种"角动量"．粒子物理学对这类反映粒子内禀对称性质的抽象空间统称为内部空间，以和普通的空间区分开．普通空间是三维实空间，内部空间则往往是复空间，并且维数也不受限制．和同位旋相联系的内部空间通常称为同位旋空间．实验显示的各种规律性和特征可以概括为：可以引入一个内部二维抽象复空间上的$SU(2)$变换群，强相互作用在这个内部空间的$SU(2)$群变换下具有不变性，相应的三个生成元构成一个具有三

个分量的抽象空间中的矢量. 考虑到这个内部对称性的数学结构和自旋相同,称这个内部 $SU(2)$ 对称性为同位旋对称性. 与自旋对应称这个量为同位旋,它是强相互作用下的守恒量,所有的强子都具有确定的同位旋. 粒子物理学中通常用 I 来标记同位旋.

在同位旋空间里也可以选定一个特殊方向, 同位旋为 I 的粒子,其同位旋在这特殊方向(通常称为第三方向)的投影 I_3 的可取值为 $I, I,-1, \cdots, -I+1, -I$ 共 $2I+1$ 个值, 这和角动量完全相同. 由于同位旋把不同电荷的粒子统一起来, 因此可以规定 I_3 的本征态也就是电荷取确定值的态, 同一同位旋多重态内不同分量 I_3 本征值的改变等于电荷的改变,即第 3 方向由 $\Delta I_3=\Delta Q$ 定. 自旋在某一特定方向的投影取不同值的电子是电子的不同运动状态. 与此相应, 一个同位旋多重态中 I_3 取不同值的诸分量也可以看作是同一种粒子的不同带电状态.

2. 同位旋的基本表示和正规表示

如果场量 Φ 按同位旋的基本表示变换,变换规则为

$$g\Phi g^{-1}=e^{i\omega^i L_i}\Phi,$$

其中生成元的表示矩阵为

$$L_1=\frac{1}{2}\tau_1,\quad L_2=\frac{1}{2}\tau_2,\quad L_3=\frac{1}{2}\tau_3$$

其中

$$\tau_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \tau_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\ \tau_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

和前面给出的 σ_i 相同. 只是通常对于和普通空间转动相联系的记作 σ_i,对于和同位旋空间转动相联系的记作 τ_i.

引入变换矩阵

$$i\tau_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

对基本表示作相似变换,由于矩阵 τ_i 满足反对易关系

$$\tau_i\tau_j+\tau_j\tau_i=\delta_{ij},$$

可以得到

$$(i\tau_2)(e^{i\alpha^i L_i})^*(i\tau_2)^{-1}=e^{i\alpha^i L_i},$$

这表明 $SU(2)$群的基本表示是实表示．由于这个结果是从矩阵τ_i满足反对易关系才得到的，它只对于基础表示才普遍成立．这个结果的物理含义是：如果场量Φ按同位旋的基本表示变换，则场量$i\tau_2\Phi^*$也按同位旋的基本表示变换．若场量Φ的属于$I_3=\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$的两个分量分别为ϕ_1和ϕ_2，则$i\tau_2\Phi^*$的属于$I_3=\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$的两个分量分别为ϕ_2^*和$-\phi_1^*$．需要说明的是，尽管从变换性质来说场量Φ和场量$i\tau_2\Phi^*$是相同的，但不能由此就推论说ϕ_1和ϕ_2^*描写的是同一种粒子，$-\phi_1^*$和ϕ_2描写的是同一种粒子．因为当场量取复共轭时，这个场所具有的其它内部连续变换对称性都要相应地变．除非这个场在其它内部连续变换下都不变，才能得到这样的联系，这就要求这个场量属于普通介子，可是从实验上早已确立的 Gell-Mann-西岛关系可以推出：不可能存在同位旋二重态的普通介子．

但是数学上只从 $SU(2)$群的变换性质来看，作代换$\phi_2^*\to\phi_1$和$\phi_1^*\to-\phi_2$(或$\phi_2^*\to-\phi_1$和$\phi_1^*\to\phi_2$)则是完全可以的．

同位旋群的所有不可约表示都可以由基本表示的直乘分解得来．由$2J$个基本表示$D\left(\frac{1}{2}\right)$直乘给出的最高权表示是$D(J)$，其维数是$m=2J+1$．表示$D(J)$的基可以表为$\phi_{(ij\cdots k)}$，有$2J$个完全对称的下标，每个下标可取值1或2，共有$2J+1$个独立的分量．这个表述也表明，由$2J$个基本表示$D\left(\frac{1}{2}\right)$直乘给出表示$D(J)$时是完全对称的耦合．

如果场量 Φ' 按同位旋的基本表示 $D\left(\frac{1}{2}\right)$变换，考虑$\Phi'$ 的厄米共轭Φ'^{+}，它也按同位旋的基本表示 $D\left(\frac{1}{2}\right)$变换，其变换规则通过矩阵乘法写出为

$$g\Phi'^{+}g^{-1}=\Phi'^{+}e^{-i\alpha^iL_i},$$

这时 Φ'^{+}是行矢量，变换矩阵是从右边乘上去的．考虑两个基本表示 Φ'^{+}和 Φ 的矩阵内积 $\Phi'^{+}\Phi$，它在同位旋 $SU(2)$ 群变换下的行为是

$$\begin{aligned}g\Phi'^{+}\Phi g^{-1}&=\Phi'^{+}e^{-i\alpha^iL_i}e^{i\alpha^iL_i}\Phi\\&=\Phi'^{+}\Phi\end{aligned}$$

这表明 $\Phi'^{+}\Phi=(\phi_1\phi_1'^{*}+\phi_2\phi_2'^{*})$是一个同位旋标量．

再看两个基本表示 Φ 和 Φ'^{+}的矩阵乘积 $\Phi\Phi'^{+}$，它是一个 2×2 矩阵．把这个矩阵用 2×2 的单位矩阵 1 和三个 τ_i 矩阵展开为

$$\begin{aligned}\Phi\Phi'^{+}=&\frac{1}{2}(\phi_1\phi_1'^{*}+\phi_2\phi_2'^{*})1+\frac{1}{2}\phi_1\phi_2'^{*}(\tau_1+i\tau_2)\\&+\frac{1}{2}\phi_2\phi_1'^{*}(\tau_1+i\tau_2)+\frac{1}{2}(\phi_1\phi_1'^{*}-\phi_2\phi_2'^{*})\tau_3.\end{aligned}$$

单位矩阵项在同位旋 $SU(2)$ 群变换下的行为是一个同位旋标量，其余部分的变换行为是一个 $J=1$ 的表示 $D(1)$，即 $SU(2)$群的正规表示．表示 $D(1)$通过 2×2 矩阵的形式写出为

$$\Phi\Phi'^{+}-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\Phi\Phi'^{+})1=\Phi\Phi'^{+}-\frac{1}{2}\Phi'^{+}\Phi1.$$

这个表示在 $SU(2)$群下的变换行为可以通过 2×2 矩阵乘法表出：

$$g\left(\Phi\Phi'^{+}-\frac{1}{2}\Phi'^{+}\Phi1\right)g^{-1}=e^{i\alpha^iL_i}\left(\Phi\Phi'^{+}-\frac{1}{2}\Phi'^{+}\Phi1\right)e^{-i\alpha^iL_i},$$

相当于对应于行和列的两个基本表示同时变换．

如果涉及的表示只限于 $D(0)$、$D\left(\frac{1}{2}\right)$和 $D(1)$，表示的直乘分解可以通过 2×2 矩阵乘法表出。例如，考虑核子 N 和 π 介子的耦合，引入核子 N 和 π 介子的场量为

$$\bar{N}=(\bar{p}\bar{n}),\pi=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+\\ \pi^- & \frac{-1}{\sqrt{2}}\pi^0\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}p\\ n\end{bmatrix},$$

这时满足同位旋守恒要求的等效相互作用可表为

$$f\bar{N}\pi\gamma_5N.$$

f 为等效耦合常数。

3. 同位旋守恒

同位旋守恒对强相互作用的过程给出很强的限制和预言。同位旋守恒要求系统在同位旋空间中的状态在反应过程中保持不变。由于系统在同位旋空间所处的态可以完全地通过系统的同位旋 I 及其在第三方向的投影 I_3 来描写，同位旋守恒直接表现为系统的 I 和 I_3 在反应前到反应后不变。

以 π 介子与核子 N 的散射为例来看同位旋守恒给出的限制和预言。电荷守恒允许下述十个过程：

弹性散射		准弹性散射	
$\pi^+p\to\pi^+p$	σ_1		
$\pi^+n\to\pi^+n$	σ_2	$\pi^+n\to\pi^0p$	σ_7
$\pi^0p\to\pi^0p$	σ_3	$\pi^0p\to\pi^+n$	σ_8
$\pi^0n\to\pi^0n$	σ_4	$\pi^0n\to\pi^-p$	σ_9
$\pi^-p\to\pi^-p$	σ_5	$\pi^-p\to\pi^0n$	σ_{10}
$\pi^-n\to\pi^-n$	σ_6		

散射过程的几率和按角度的分布用散射截面来描写，可以用 σ_1、

$\sigma_2, \cdots, \sigma_{10}$ 分别表示这十个过程的截面. 其中前六个是弹性散射过程,后面四个是电荷交换过程. 如果没有同位旋守恒,也没有其它对称性的限制,这十个截面是互相独立的,需要独立进行测量. 但是过程 7 和过程 8 互为逆过程,过程 9 和过程 10 互为逆过程. 如果考虑了时间反演不变性,应有 $\sigma_7=\sigma_8$ 和 $\sigma_9=\sigma_{10}$,也就是说只有八个互相独立的截面,需要用八个独立的跃迁振幅来描写. 但是下面可以看到,考虑了同位旋不变性后,这八个过程最后将只需要用两个独立振幅来描写.

强相互作用下同位旋守恒来自强相互作用在同位旋空间转动时具有不变性. 考虑在同位旋空间绕垂直于第三轴的任意轴转180度,这样就把第三轴的方向反向了,所有的粒子的 I 不变,但 I_3 变号. 在这样的转动下,过程 1 和过程 6 互换,过程 2 和过程 5 互换,过程 3 和过程 4 互换,过程 7 和过程 10 互换,过程 8 和过程 9 互换,同位旋空间转动不变性给出 $\sigma_1=\sigma_6, \sigma_2=\sigma_5, \sigma_3=\sigma_4$ 和 $\sigma_7=\sigma_8=\sigma_9=\sigma_{10}$. 这样从同位旋空间转动不变性出发,即使不作定量计算,已经可以得出最多只有四个独立的截面.

π 介子与核子 N 散射的跃迁振幅可以表为

$$M=\langle \pi N | H_{eff} | \pi N \rangle,$$

同位旋空间转动不变性要求

$$\langle I I_3 | H_{eff} | I' I_3' \rangle = M_I \delta_{II'} \delta_{I_3 I_3'}.$$

考虑到 πN 系统的总同位旋只能是 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$,在上式 H_{eff} 的两边分别都插入恒等算符

$$\begin{aligned} I = & \left|\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right\rangle \left\langle\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right\rangle \left\langle\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right| \\ & + \left|\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\right\rangle \left\langle\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}\right\rangle \left\langle\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}\right| \\ & + \left|\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2}\right\rangle \left\langle\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2}\right\rangle \left\langle\frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2}\right|, \end{aligned}$$

πN 系统的各种电荷态通过 Clebsch-Gordan 系数表为 $|II_3\rangle$ 态的线性组合:

$$|\pi^+p\rangle=\left|\frac{3}{2}\quad\frac{3}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^+n\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^0p\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^0n\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^-p\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$|\pi^-n\rangle=\left|\frac{3}{2}\quad-\frac{3}{2}\right\rangle.$$

将这些表达式代入，得到四个跃迁振幅可以通过两个独立的同位旋跃迁振幅表出:

$$M(1)=M(6)=M_{3/2}$$

$$M(2)=M(5)=\frac{1}{3}(M_{3/2}+2M_{1/2}),$$

$$M(3)=M(4)=\frac{1}{3}(2M_{3/2}+M_{1/2}),$$

$$M(7)=M(8)=M(9)=M(10)=\frac{\sqrt{2}}{3}(M_{3/2}-M_{1/2}),$$

其中 $M_{3/2}$ 和 $M_{1/2}$ 分别为$I=\frac{3}{2}$ 和 $I=\frac{1}{2}$的跃迁振幅. 在量子理论中，这两个跃迁振幅都是复量，可以用复平面上的矢量来表示. 由于反应截面正比于跃迁振幅绝对值的平方，和测量有直接关系的是这两个跃迁振幅的绝对值和它们的位相差，亦即只有三个需要独立测量的量. 计算给出四个不同的截面 σ_1，σ_2，σ_3 和 σ_7 之间还必须满足关系

$$\sigma_1+\sigma_2=2\sigma_3+\sigma_7.$$

此外利用跃迁振幅的复数性质还可以得到下述四个三角关系：

$$(\sqrt{\sigma_1},\sqrt{\sigma_2},2\sqrt{\sigma_3});\qquad (\sqrt{\sigma_1},\sqrt{\sigma_2},\sqrt{2\sigma_7});$$

$$\left[\sqrt{\sigma_1},\sqrt{\sigma_3},\sqrt{\frac{\sigma_7}{2}}\right];\qquad \left[\sqrt{\sigma_2},\sqrt{\sigma_3},\sqrt{\frac{\sigma_7}{2}}\right].$$

每一组中任两个值之和大于第三个值，任两个值之差的绝对值小于第三个值．这些预言都可以在实验中进行检验，并且已经得到实验的很好验证．

4．同位旋的破坏

再看 ϕ 介子衰变的例子．ϕ 介子是质量为(1019.6±0.1)MeV的介子，其同位旋为零，自旋为1，重子数和奇异数均为零．根据强相互作用的规律分析，ϕ 介子可以通过强相互作用衰变为 K^++K^- 或 $K^0+\bar{K}^0$ 末态，其等效相互作用拉氏量为

$$f\phi_\mu[(\partial^\mu K^+)K^--K^+(\partial^\mu K^-)+(\partial^\mu K^0)\bar{K}^0-K^0(\partial^\mu\bar{K}^0)].$$

这表明同位旋守恒要求 $\phi\to K^++K^-$ 和 $\phi\to K^0+\bar{K}^0$ 的衰变振幅相等，如果 K^+、K^- 粒子的质量和 K^0、$\bar{K}^0$ 粒子的质量相同，则立刻可以推断这两种衰变方式的衰变分支比相同．但实际上它们的质量略有差别．

$$m_{K^0}=m_{\bar{K}^0}=(497.671\pm0.031)\,\mathrm{MeV},$$

$$m_{K^+}=m_{K^-}=(493.646\pm0.009)\,\mathrm{MeV},$$

这个微小差别

$$m_{K^0}-m_{K^\pm}=(4.024\pm0.032)\,\mathrm{MeV},$$

导致在 ϕ 的质心系中，两种衰变方式的衰变动量分别平均为110 MeV 和127 MeV，这个差别将导致这两种衰变方式的分支比有所不同．

由于K介子的自旋为零，这两种衰变方式应该通过轨道角动量为1的分波进行．根据上面给出的等效相互作用，拉氏量给出

这两个衰变过程的部分宽度为

$$\Gamma=\frac{f^2k^3}{6\pi m_\phi^2},$$

其中 k 是在 ϕ 的质心系中 K 介子的衰变动量

$$k=\sqrt{\frac{m_\phi^2}{4}-m_K^2},$$

从这个结果可以得到在同位旋守恒的基础上并考虑了质量微小差别的影响后，这两种衰变方式的相对分支比为

$$R=1.536$$

如果进一步考虑到 ϕ 的质量有宽度为 4.22 MeV 的分布，计算所得的部分宽度都还必需对 ϕ 的质量用 Breit-Wigner 分布求平均：

$$\Gamma=\frac{f^2}{48\pi^2}\int\frac{m_\phi\Gamma_\phi(s-m_K^2)^{\frac{3}{2}}ds}{[(s-m_\phi^2)+m_\phi^2\Gamma_\phi^2]s}.$$

由此可以给出对这两种衰变方式相对分支比的更精确的理论估算为

$$R=1.421.$$

现有实验给出的值约为 1.44±0.05，与理论预言值相当符合．这个结果表明，在讨论强相互作用过程中同位旋破坏的影响时，可以在处理相互作用过程时按同位旋守恒来处理，而同位旋破坏的影响可以主要归结为同位旋多重态中不同分量之间质量差引起的运动学效应．

§ 6.3　奇异数、重子数、粲数和底数

1．奇异粒子和奇异数

1947 年在宇宙射线实验中，首先观察到了后来被称为奇异粒子的粒子．1954 年加速器实验中产生了大量奇异粒子后，它们的"奇异"特性才充分展现出来并得到系统的研究．"奇异粒子"是

当时新发现的一批粒子的总称，它们具有以下两个明显的特性：

(1) 它们是协同产生，独立衰变．在碰撞过程中至少有两个奇异粒子一起产生，然后每个奇异粒子再分别独立地衰变掉，最终衰变成的粒子都是过去已知的粒子，而不再有奇异粒子．

(2) 它们是快产生、慢衰变．奇异粒子产生于粒子的高能碰撞，碰撞经历的时间量级为 10^{-24} 秒，而它们衰变的平均寿命时间量级为 10^{-10} 秒或更长，两个时间量级差约为 10^{14} 倍．

奇异粒子的这些特性，可以用客观上存在一种新的守恒量子数来概括．这种新守恒量子数称为奇异数，它只能取整数值．过去熟知的粒子，奇异数均为零，称为普通粒子．奇异粒子的奇异数不为零．在强相互作用和电磁相互作用过程中，奇异数守恒，在弱相互作用过程中，奇异数可以不改变，也可以改变一．奇异粒子的产生是通过普通粒子的碰撞来实现的，强相互作用过程中奇异数守恒决定了末态中奇异粒子必须协同产生．奇异粒子的衰变是通过弱相互作用来实现的，因为相互作用很弱，需要的时间较长，但不再要求奇异数守恒了．

因此奇异粒子"奇异"性质的来源在于奇异数 S 的近似守恒性质：对于强相互作用和电磁相互作用过程，$\Delta S=0$；对于弱相互作用过程，$|\Delta S|=0, \pm 1$．

2．内部 $U(1)$ 对称性

如果场量 Φ 的相位作一定的变换

$$g\Phi g^{-1}=e^{i\alpha}\Phi,$$

这个单参数相位变换构成一个 $U(1)$ 内部变换群．考虑到不同场量的相位要同步地变换，上式应普遍化为

$$g\Phi g^{-1}=e^{i\alpha Y}\Phi,$$

其中 Y 为 $U(1)$ 群的生成元，对于不同的场量其本征值不同．相位的同步性要求生成元 Y 的本征值取某一最小值的整数倍，以保证

在适当的相位变换时，所有的场的相位可以同时取 2π 的整数倍.不失讨论的普遍性，可以要求Y的本征值取整数值. 如果运动规律在这$U(1)$内部变换群的变换下不变，则这个$U(1)$群的生成元Y就是一个相加性守恒量.

奇异数S就是一个通过总结大量实验现象显现的规律性而认识的内部相加性守恒量.

3. 重子数

质子的质量是电子质量的1836倍，但质子是稳定的，并没有观察到质子的衰变. 自由中子虽然可以衰变，但它衰变时转化成比它略轻的质子. 这表明还存在一个内部$U(1)$对称性，相对应的相加性守恒量称为重子数b. 质子和中子的重子数为1，介子、电子和光子的重子数都是0. 实验表明，重子数是一个严格的内部相加性守恒量.

电荷、重子数、奇异数都是内部相加性守恒量，它们的相同点在于数学结构相同，都是和某种内部$U(1)$变换不变性相联系，可取值都是整数. 它们之间的差别表现在物理上，守恒的程度不同. 电荷和重子数是严格守恒量，奇异数在弱相互作用下不守恒，同位旋第三分量在电磁相互作用下守恒，但在弱相互作用下也不守恒. 它们之间的另一差别表现在如何测量上，电荷的测量可以看粒子走过的径迹，用电动力学来计算和分析. 这是因为电荷是电磁相互作用的相互作用常数，它决定了电磁相互作用的强度，从而可以通过电磁相互作用来测量它. 重子数和奇异数则不能通过类似的动力学效应来测量，它们只能根据守恒定律，通过已知粒子的重子数和奇异数来确定未知粒子的重子数和奇异数.

4. Gell-Mann-西岛关系

各粒子奇异数S的值是根据奇异数守恒的要求以及实验结果分析所赋予的. 从这两方面的要求来说，各粒子的S值并没有

完全确定下来．事实上，如果把上面所给出各粒子的 S 值都乘一共同常数值作为新定义的 S 值，则上述要求仍满足；如果把上面所给出各粒子的 S 值再加一个强相互作用过程中守恒的相加性量子数作为新定义的守恒量，上述要求亦仍满足．为了避免这些不确定性带来的任意性，粒子物理学家实际上采取了自然的约定，即以最初确定的上述粒子的奇异数值为标准来确定其它粒子的奇异数值．按照这样规定的奇异数值，总结出强子的电荷 Q、同位旋沿同位旋空间“第三方向”的投影 I_3、重子数 b 和奇异数 S 有以下关系：

$$Q=I_3+\frac{1}{2}(b+S),$$

上式称为 Gell-Mann-西岛关系，以后的实验充分证明这个关系的普遍性，这个关系在六十年代强子对称性及分类理论的探索中是一个重要的基本关系式，Gell-Mann-西岛关系中的重子数 b 和奇异数 S 总是相加出现，有时人们又引入超荷 $Y=b+S$ 来代替奇异数．

奇异数的引入很好地解释了奇异粒子的特性．奇异数的存在和被认识给人们以启示：粒子物理中丰富多采的内容表现之一就是自然界中客观上还可能存在其它一些反映粒子内部性质的量子数，它们有可能是“近似”守恒量，有可能并不是某种相互作用的“荷”．1974 年以后，先后发现的粲数 C 和底数 B，都属于这类量子数．考虑到强子物理的这些发展，Gell-Mann-西岛关系已经推广为

$$Q=I_3+\frac{1}{2}(b+S+C+B+T),$$

其中 T 为顶数，这个量子数的存在理论上早有预言，但现在实验上还没有这个量子数存在的直接证据．

§6.4 正反粒子共轭变换

1. 粒子与反粒子

1932年，在宇宙线实验中发现了正电子. 1955年，在加速器实验中发现了反质子，它的质量和质子相同，电荷为$-e$. 1956年，在加速器实验中又发现了反中子，它的质量和中子相同，电荷也是零，它和中子的差别之一是：中子的磁矩相对于自旋是反号的，反中子的磁矩相对于自旋则是同号的. 这些发现表明，各种粒子都有相应的反粒子存在，这个规律是相当普遍的. 按照量子场论提供的图象，一般说来，场的激发态表现为粒子. 场的任一种激发状态都有与之对应的复共轭的激发状态，这在物理上相应于粒子与反粒子. 粒子和反粒子的质量、寿命、自旋相同，但它们的一切内部相加性守恒量都互相反号. 也有可能某些粒子的一切内部相加性守恒量都为零，反粒子就是它们自己，这些粒子称为Majorana粒子或纯中性粒子，相应的场称为Majorana场或纯中性场.

各种粒子都有与之相对应的反粒子，这个普遍结论被几十年的粒子物理的发展不断印证. 但是中微子是例外，中微子并没有上面含意下的反粒子，通常所说的反中微子并不是上面含意下中微子的反粒子.

2. C变换及其基本性质

如果A粒子对应的场量就用A来描写，在内部变换群G的变换下场量A的变换规则为

$$gAg^{-1}=e^{i\alpha^i L_i}A,$$

正反粒子变换定义为一切粒子换为相应的反粒子的变换，又称C变换. 如果A粒子的反粒子所对应的场量用A^C来描写，在内部变换群G的变换下，场量A^C的变换规则相应为

$$gA^Cg^{-1}=e^{i\alpha^i L_i^C}A^C,$$

考虑到C变换的定义，所有的内部相加性守恒量都要变号，反映为在变换式中，内部变换群G的所有的生成元的表示矩阵在对角化后都要变号，这就要求

$$L_i^C = -L_i,$$

或者

$$L_i^C = -\bar{L}_i,$$

但前者不满足生成元的李代数关系，后者则满足生成元的李代数关系，因此只能是后者．又从场量A的变换规则可以得到A^*的变换规则为

$$gA^*g^{-1} = e^{-i\alpha^i L_i^*}A^* = e^{-i\alpha^i \bar{L}_i}A^*,$$

比较场量A^C和A^*的变换规则，可以得出它们实际上是同一场量，它们之间只应差一个常数因子，可以表为

$$CAC^{-1} = A^C = C'(A)A^*$$

其中$C'(A)$是一个绝对值为1的数，称为场A的C变换相因子，对于一个不可约表示的各分量是同一值．这个结果表明：如果粒子A属于内部变换群G的某一表示D，则其反粒子$\bar{\mathrm{A}}$属于该表示的共轭表示D^*，经过C变换粒子A变为相应的反粒子$\bar{\mathrm{A}}$时，整个不可约表示有同一的C变换相因子．

考察一个A粒子的态$|\mathrm{A}\rangle$，其对应的反粒子态为$|\bar{\mathrm{A}}\rangle$，上述C变换的结果一般可表为

$$C|\mathrm{A}\rangle = C'(\mathrm{A})|\bar{\mathrm{A}}\rangle,$$

更进一步来说，对于由A，B，C，…等粒子组成的系统，C变换可表为

$$C|\mathrm{ABC}\cdots\rangle = C'(\mathrm{A})C'(\mathrm{B})C'(\mathrm{C})\cdots|\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{C}}\cdots\rangle.$$

C变换有以下性质：

(1) 按定义C变换满足

$$C^2 = 1,$$

对于一个粒子A的态$|A\rangle$

$$C^2|A\rangle = CC'(A)|\bar{A}\rangle = C'(A)C'(\bar{A})|A\rangle,$$

因此有

$$C'(A)C'(\bar{A}) = 1,$$

即

$$C'(\bar{A}) = C'(A)^*,$$

粒子和反粒子的C变换相因子之间是复共轭的关系.

(2) 如果Q是一个相加性守恒量，$|A\rangle$是Q的任意本征态，则有

$$QC|A\rangle = QC'(A)|\bar{A}\rangle = -Q'(A)C'(A)|\bar{A}\rangle$$
$$= -Q'(A)C|A\rangle = -CQ|A\rangle,$$

即

$$(QC + CQ)|A\rangle = 0.$$

考虑到任意态总可以用Q的本征态展开，因此有

$$QC + CQ = 0.$$

这个结果实际上是上面给出的

$$\tilde{L}_i^C = -\tilde{L}_i$$

的特殊情形，因为从这式给出

$$C\tilde{L}_iC^{-1} = -\tilde{L}_i,$$

亦即一般有

$$\tilde{L}_iC + C\tilde{L}_i = 0,$$

将$L_i = Q$代入，再考虑到用Q的本征态为基时相加性守恒量Q是对角化的，总有$\tilde{Q} = Q$，就得到Q和C是反对易的. 这就是说，所有的相加性守恒量都和C变换反对易. 因此一般来说，相加性守恒量和C变换没有共同本征态，只有相加性守恒量取值为零的态才可能同时又是C变换的本征态.

3. 纯中性态和C宇称

纯中性粒子在C变换下是不变的，它的C变换相因子称为C宇称. 由于C变换满足$C^2=1$，C宇称的值可以是1或-1，取决于描述该粒子运动状态的场量在C变换下是不是变号. 作为一个相乘性守恒量，对于C宇称的值来说，重要的是它的符号，因此通常用$C'=+$或$-$来代替$C'=+1$或-1.

光子是电磁场的量子，是人们最熟知的纯中性粒子. 光子的运动状态由电磁场的场量A_μ来描写，它们满足Maxwell方程

$$\partial^\nu\partial_\nu A_\mu=4\pi j_\mu.$$

在C变换下，一切电荷电流都改号，场量A_μ也随着改号，因此光子的C宇称为-1. 即

$$C'(\gamma)=-1.$$

π^0介子也是纯中性粒子，它的C宇称可以由C宇称守恒来确定：π^0介子可以通过电磁相互作用衰变为两个光子，由于电磁相互作用具有C变换不变性，C宇称在衰变过程中守恒，因此光子的C宇称为

$$C'(\pi^0)=C'(\gamma)C'(\gamma)=1.$$

多个粒子组成的系统，如果其所有内部相加性守恒量的总和都为零，则有可能是一个纯中性系统，但不一定是. 只有在C变换下系统的组成仍不变时，它才是一个纯中性系统. 纯中性系统是否有确定的C宇称，还取决于系统的时空结构性质. 一个最重要并且常见的纯中性系统是一对正反粒子组成的系统. 如果这一对正反粒子的自旋之和为S，正反粒子之间的相对轨道角动量为L，则理论上已普遍推出：不论组成系统的正反粒子是费米子还是玻色子，这个纯中性系统的C宇称为

$$C'=(-1)^{L+S},$$

这个结果非常重要，在粒子物理的对称性分析中经常使用.

4. C变换不变和C宇称守恒

强相互作用和电磁相互作用在C变换下不变，这表明对于通过强相互作用和电磁相互作用实现的过程，可以作以下两点论断：

(1) 通过C变换相联系的两个过程规律和行为相同.

(2) 如果初态是C变换的本征态，也就是说初态有确定的C宇称，则末态也是C变换的本征态，有和初态相同的C宇称，即C宇称守恒.

例如π^0介子的C宇称为正，光子的C宇称为负，因此π^0介子可以衰变成两个光子，但不能衰变成三个光子.

又例如，电子和正电子组成的电子偶素(e^+e^-)，如果轨道角动量$L=0$，合自旋S还可以有两个值：

$S=0$，这时$C'=+$，可以衰变到$\gamma\gamma$，但不能衰变到$\gamma\gamma\gamma$；

$S=1$，这时$C'=-$，可以衰变到$\gamma\gamma\gamma$，但不能衰变到$\gamma\gamma$.

§6.5 G 变 换

1. G变换和G宇称

C宇称守恒对于通过强相互作用和电磁相互作用实现的过程给出了很强的预言，但是由于只有纯中性粒子和某些纯中性系统才有确定的C宇称，它的适用范围受到很大的限制. 人们期望能找到适用范围更大的类似的守恒定律. 除了同位旋对称性所包含的相加性守恒量I_3以及与I_3相关的电荷Q之外，其它内部相加性守恒量都为零的粒子称为普通介子. 普通介子满足新的对称性要求，这个对称性是由同位旋和C变换所复合组成的.

定义G变换为绕同位旋第二轴转π角后再作C变换的复合变换，即

$$G=CI_2(\pi).$$

在抽象的同位旋空间里，绕第二轴转π角相当于把第一轴和第三轴都反向，这样粒子的I_3就将变号. 再经过C变换时，粒子

所有的内部相加性守恒量都变号，I_3就将再变一次号，又回到了初始的值．因此实际上G变换不改变I_3的值，但把除I_3以外的其它所有的内部相加性守恒量都变号．对于普通介子，除I_3以外的其它所有的内部相加性守恒量都为零，实际上就是G变换的本征态，其本征值称为G宇称．

2. 强子的G变换性质和G宇称

对于普通介子，由于$I_3=Q$，它的同位旋是整数，其同位旋波函数可以通过同位旋空间方位角θ和ϕ的球函数来描写．$I_2(\pi)$相当把(θ,ϕ)方向转为$(\pi-\theta,\pi-\phi)$方向．C变换下粒子变为相应的反粒子，同位旋$SU(2)$群生成元的变换行为是

$$CL_iC^{-1}=-L_i,$$

将L_i以I_i代入，并在以I_3的本征态为基的表象中表出有

$$CI_1C^{-1}=-I_1,$$

$$CI_2C^{-1}=I_2,$$

$$CI_3C^{-1}=-I_3.$$

最后一式确实反映了I_3本征态的本征值变号．这三个式子表明在绕三个轴转动时，绕第一轴和绕第三轴旋转方向都反向，这相当于第二轴的取向反向，即把ϕ换为$-\phi$．在作C变换时同时还要乘上C变换相因子C'．C'的值对整个同位旋多重态是同一值，并不随I_3不同而改变．因此对于普通介子，G变换相当于在球函数中把(θ,ϕ)换为$(\pi-\theta,\pi+\phi)$，同时再乘上C变换相因子C'．利用球函数的性质

$$Y_{Lm}(\pi-\theta,\pi+\phi)=(-1)^L Y_{Lm}(\theta,\phi),$$

给出普通介子的G宇称为

$$G'=(-1)^I C'.$$

例如对于π介子，$C'=+$，$I=1$，因此$G'=-1$，即G宇称为－．

作为一个典型的例子，考察K介子的G变换性质．K介子是

$I=\frac{1}{2}, S=1, B=0$ 的粒子，它的 $I_3=\pm\frac{1}{2}$ 的两个分量分别为 K^+ 和 K^0. 对 K 介子作 G 变换，由于

$$I_2(\pi)=e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\tau_2\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

给出

$$G|K^+\rangle=-C'(K)|\bar{K}^0\rangle,$$

$$G|K^0\rangle=C'(K)|K^-\rangle.$$

再考虑 K 介子的反粒子 $\bar{K}$ 介子，$\bar{K}$ 介子是 $I=\frac{1}{2}, S=-1, B=0$ 的粒子，它的 $I_3=\pm\frac{1}{2}$ 的两个分量分别为 $\bar{K}^0$ 和 K^-. 由于对于 $\bar{K}$ 介子变换矩阵 $I_2(\pi)$ 和 K 介子的相同，$\bar{K}^0$ 和 K^- 的变换规则为

$$G|\bar{K}^0\rangle=C'(\bar{K})|K^+\rangle,$$

$$G|K^-\rangle=-C'(\bar{K})|K^0\rangle.$$

K 介子和 $\bar{K}$ 介子的奇异数都不为零，它们各自有确定的 G 变换性质，但它们都不是 G 变换的本征态，没有 G 宇称.

再考虑一对正反 K 介子组成的系统. 从上面的讨论立刻可以得到

$$G|K^+\bar{K}^0\rangle=-C'(K)C'(\bar{K})|\bar{K}^0K^+\rangle=-|\bar{K}^0K^+\rangle,$$

$$G|K^0K^-\rangle=-C'(K)C'(\bar{K})|K^-K^0\rangle=-|K^-K^0\rangle,$$

$$G|K^+K^-\rangle=C'(K)C'(\bar{K})|\bar{K}^0K^0\rangle=|\bar{K}^0K^0\rangle,$$

$$G|K^0\bar{K}^0\rangle=C'(K)C'(\bar{K})|K^-K^+\rangle=|K^-K^+\rangle.$$

前面两式涉及的是 $I=1, I_3=\pm1$ 的态，G 变换后还必须把末态中正反 K 介子交换才能还原到初态，这个交换给出一个因子 $(-1)^L$，这表明一对正反 K 介子组成的 $I=1$ 的系统的 G 宇称为

$(-1)^{L+1}$.

后面两式要作线性组合，再考虑末态中正反K介子交换给出的因子$(-1)^L$，可以得出

$$|K\bar{K}(I=0,I_3=0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^+K^-\rangle+|K^0\bar{K}^0\rangle),G'=(-1)^L,$$

$$|K\bar{K}(I=1,I_3=0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^+K^-\rangle-|K^0\bar{K}^0\rangle),G'=(-1)^{L+1}.$$

从G变换的定义出发，可以得到以下重要性质：

(1) 一切强子都有确定的G变换性质，但只有普通介子才具有G宇称．这一点和C变换很相似：一切强子都有确定的C变换性质，但只有中性普通介子才具有C宇称．

(2) 一个由多个强子组成的系统，只要其所具有的内部相加性守恒量除I_3和Q外都为零，又有确定的同位旋，并且其相应的$I_3=0$分量具有确定的C宇称，则这个态就具有确定的G宇称，其值为

$$G'=(-1)^I C'.$$

特别是对于由一对正反粒子组成的具有确定轨道角动量L和总自旋S的系统

$$G'=(-1)^{I+L+S}.$$

作为一个例子，考察一对正反K介子组成的，具有确定同位旋的系统．由于K介子的同位旋$I=\frac{1}{2}$，这个系统的同位旋只能是$I=0$或1．K介子的自旋为0，因此这个系统的总自旋为0.这个系统的G宇称为：

当$I=0$时，$G'=(-1)^L$；

当$I=1$时，$G'=(-1)^{L+1}$.

这正是上面从正反K介子的G变换性质直接导出的结果．

(3) 由几个具有确定的G宇称的子系统所组成的系统也具有

确定的 G 宇称，其值等于各子系统 G 宇称的乘积.

由于 π 介子的 G 宇称为 -1，n 个 π 介子组成系统的 G 宇称等于 $(-1)^n$.

3. G 宇称守恒

由于强相互作用在 C 变换和同位旋转动下是不变的，因此它在 G 变换下也是不变的. 但是在电磁相互作用下，由于同位旋不守恒了，G 也就不守恒了. G 宇称的这个性质在研究和分析普通介子的强衰变时特别重要，它给出很强的限制和预言.

例 1. 在研究强子碰撞产生多个 π 介子的末态中，发现 $\pi^+\pi^0$，$\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^-\pi^0$ 的不变质量在 (768.3 ± 0.5)MeV 处有一个很宽的峰，宽度为 $\Gamma=(149.1\pm2.9)$MeV. 但在 $\pi^+\pi^+$ 和 $\pi^-\pi^-$ 的不变质量中却没有看到相应的峰. 这些峰的出现表明存在一个短寿命的粒子，称为 ρ 粒子. 由于它的宽度值远大于 MeV 的量级，可以推测它是通过强相互作用而衰变的. 由于它只在电荷 $Q=1,0$ 和 -1 的态中被发现，并且末态中只有普通介子，可以判定它是 $I=1$ 的普通介子.

从 G 宇称守恒定出 ρ 介子的 G 宇称为 $+1$，由于 $G'=(-1)^I C$ 进而可以定出 ρ^0 介子的 C 宇称为 -1. 这样可以预言 ρ 介子通过强相互作用衰变到 $\pi\pi\pi$ 末态是严格禁戒的，ρ^0 介子通过电磁相互作用衰变到 $\gamma\gamma$ 末态也是严格禁戒的，这些预言都已被实验很好地验证了. 由于 $\pi\pi$ 系统的总自旋为零，$\pi^+\pi^-$ 系的 C 宇称为 $(-1)^L$，其中 L 为 $\pi^+\pi^-$ 之间的轨道角动量. 已经定出 ρ^0 介子的 $C'=-1$，由此决定了 L 必须为奇数. 角动量守恒决定了 ρ^0 介子的自旋 J 等于 $\pi^+\pi^-$ 之间的轨道角动量 L，从而 J 也必须是奇数. 进一步的实验确定了 ρ 介子的 $J=1$.

例 2. 在研究强子碰撞产生的多个 π 介子的末态中，发现 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 的不变质量在 (781.95 ± 0.14)MeV 处有一个峰，宽度为

$\Gamma=(8.43\pm0.10)$MeV，但在$\pi^+\pi^+\pi^-$和$\pi^+\pi^-\pi^-$的不变质量中却没有看到相应的峰．这表明存在一个短寿命的粒子，称为ω粒子．由于它的宽度值为MeV的量级，可以推测它主要是通过强相互作用而衰变的．由于它只在电荷$Q=0$的态中被发现，并且末态中只有普通介子，可以判定它是$I=0$的普通介子．

从G宇称守恒定出ω介子的G宇称为-1，进而可以定出ω介子的C宇称为-1．这样可以预言ω介子通过强相互作用衰变到$\pi\pi$末态是严格禁戒的，ω介子通过电磁相互作用衰变到$\gamma\gamma$，$\pi^0\pi^0$，$\pi^0\pi^0\pi^0$等末态也是严格禁戒的，但它通过电磁相互作用衰变到$\pi^0\gamma$末态却是允许的，这些预言都已被实验很好地验证了．

ω介子虽然由于G宇称守恒的限制，不能通过强相互作用衰变到$\pi^-\pi^-$末态，但是如果ω介子的自旋$J=$奇数，它仍可通过电磁作用而衰变到$\pi^+\pi^-$末态，因为这时$\pi^+\pi^-$系的C宇称也是-1．实验上后来发现ω介子有$(2.21\pm0.30)\%$的分支比衰变到$\pi^+\pi^-$末态，这也印证了ω介子的自旋$J=$奇数．实验确定了ω介子的自旋也是$J=1$．

例3．六十年代初期，在研究强子碰撞产生的多个π介子的末态中，发现$\pi^+\pi^-\pi^0$和$\pi^0\pi^0\pi^0$的不变质量都在(548.8 ± 0.6)MeV处有一个峰，当时观察到的宽度为$\Gamma<1$ MeV，但在$\pi^+\pi^+\pi^-$和$\pi^+\pi^-\pi^-$的不变质量中却没有看到相应的峰．这表明存在一个短寿命的粒子，称为η粒子．由于它只在电荷$Q=0$的态中被发现，并且末态中只有普通介子，可以判定它是$I=0$的普通介子．由于η介子可以衰变到$\pi^0\pi^0\pi^0$末态，无论这是通过强相互作用还是电磁相互作用，都可以定出η介子的C宇称为$+1$．这样η介子的G宇称也应是$+1$，η介子衰变到$\pi^+\pi^-\pi^0$末态和$\pi^0\pi^0\pi^0$末态都不能是通过强相互作用而只能是通过二级电磁相互作用．由于η介子的另两个主要衰变方式是$\gamma\gamma$和$\pi^+\pi^-\gamma$，分别是通过二级电磁相互

作用和一级电磁相互作用进行的，η 介子的总宽度应远小于 MeV 的量级，现在实验测定 η 介子的总宽度为 $\Gamma=(1.19\pm0.12)$keV.

§6.6 空间反射变换

1. 空间反射变换

空间反射变换简称 P 变换，定义为空间坐标都反号但时间不变的变换，即

$$PXP^{-1}=-X,\qquad PtP^{-1}=t.$$

在 P 变换下，每一个运动状态变为另一个状态. 虽然对于一个特定的点来说，P 变换的效果等价于某种转动. 但对于一个物体的描写来说，它就完全不能等效于某种转动. 因此一般来说，P 变换是一种典型的分立变换，它不能等价于某种特殊的连续变换. 在经典物理范围，P 变换不变性并不对应存在某种守恒定律，但在微观物理范围内，P 变换不变性直接和宇称守恒相联系.

在 P 变换下

$$PPP^{-1}=-P,\quad PEP^{-1}=E,$$

$$PLP^{-1}=PX\times PP^{-1}=(-X)\times(-P)=L.$$

因此轨道角动量 L 在 P 变换下不变，可表为 $PL=LP$，它们有共同的本征态，可以同时测量.

2. 轨道宇称和内禀宇称

按照定义 P 变换满足

$$P^2=1.$$

因此 P 的本征值可取值为 ±1，P 的本征值又称 P 宇称. 当系统轨道角动量为 L 时，其本征函数为 $Y_{Lm}(\theta,\phi)$，在 P 变换下

$$\theta\to\pi-\theta,\quad \theta\to\pi+\phi,$$

从而有

$$PY_{Lm}(\theta,\phi)=Y_{Lm}(\pi-\theta,\pi+\phi)=(-1)^LY_{Lm}(\theta,\phi),$$

亦即这时P宇称值为$P'=(-1)^L$.

如果在讨论的问题中，粒子数目不变，没有粒子的产生和湮没过程，这时可以把粒子内部波函数在空间反射变换下的行为与粒子时空波函数在空间反射变换下的行为分开处理．这样仅就时空波函数在P变换下的行为来看，可以证明P是一个厄米算符，同时也是一个幺正算符．但是在粒子物理学中一般需要考虑粒子数是可变的，因此必须同时考虑粒子内部波函数在P变换下的性质．在这种情况下，就不再能象仅考虑时空波函数那样证明P变换具有厄米性．

在P变换下粒子内部波函数还有一定的P宇称，又称内禀宇称，简称粒子的宇称．由于这种宇称与现在还不清楚的粒子内部运动的对称性有关，不能象轨道角动量那样给出明显的表达式，只能根据P守恒的要求从实验上确定．

3．相对宇称和绝对宇称

既然内禀宇称只能根据P宇称守恒定律的要求来确定，它就具有前面已讲过的宇称的相对性，并且只有纯中性粒子才有绝对的内禀宇称．关于P宇称可以作以下说明：

(1) 纯中性粒子的内禀宇称由实验来决定，例如：$P'(\gamma)=-1, P'(\pi^0)=-1$.

(2) C变换与P变换的联系

对粒子A的态$|A\rangle$作CP变换

$$CP|A\rangle=CP'(A)|A\rangle=C'(A)P'(A)|\bar{A}\rangle,$$

对态$|A\rangle$作PC变换则得

$$PC|A\rangle=PC'(A)|\bar{A}\rangle=C'(A)P'(\bar{A})|\bar{A}\rangle.$$

因此C变换和P变换并不对易，一般来说它们的本征态并不都是共同本征态．只有纯中性粒子才是C变换和P变换的共同本征态．

(3) 考察一对正反粒子组成的纯中性系统的宇称。在坐标表象质心系中进行考察，设系统的轨道角动量为 L，总自旋为 S. 系统的态可以用 $|x, r; -x, t\rangle$ 描写，其中第一组量描写粒子，第二组量描写反粒子，$2x$ 为两粒子间相对矢径，r, t 分别描写两粒子的自旋状态. 对这个态作 CP 变换

$$CP|x, r, -x, t\rangle = C|-x, r; x, t\rangle$$

$$= |x, t; -x, r\rangle$$

再交换自旋给出

$$= (-1)^{S+1}|x, r; -x, t\rangle, \text{对费米子};$$

$$= (-1)^{S}|x, r; -x, t\rangle, \text{对玻色子}.$$

但已知这系统的 C 宇称为 $(-1)^{L+S}$，由此得到系统的(绝对)宇称为

$$P' = (-1)^{L+1}, \text{对正反费米子对};$$

$$P' = (-1)^{L}, \text{对正反玻色子对}.$$

其中 $(-1)^L$ 是轨道角动量的贡献，因此一对正反粒子组成系统的内禀宇称为

$$P' = -1, \quad \text{对正反费米子对};$$

$$P' = +1, \quad \text{对正反玻色子对}.$$

一对正反粒子组成系统的内禀宇称又可统一表为

$$P' = (-1)^{2s},$$

其中 s 为粒子(或反粒子)的自旋.

(3) 在内部变换群 G 的变换下场量 A 的变换规则为

$$gAg^{-1} = e^{i\alpha^i L_i}A,$$

其中 L_i 是生成元的表示矩阵. 空间反射变换和内部变换群 G 是互相独立的，在数学上表现为空间反射变换和内部变换是对易的，这就自然要求属于内部变换群 G 的同一不可约表示的各粒子内禀宇称相同.

对于非纯中性粒子的内禀宇称，针对各种不同的内部对称性相加性守恒量，在上述普遍性质的基础上，再补充一些约定，给出以下的标准以消除不确定性：

守恒量	内禀宇称的标准
电荷 Q	同一同位旋多重态的不同电荷态宇称互同
重子数 b	$P'(\mathrm{N})=+1$
e 轻子数 L_e	$P'(\mathrm{e}^-)=+1$
μ 轻子数 L_μ	$P'(\mu^-)=+1$
τ 轻子数 L_τ	$P'(\tau^-)=+1$
奇异数 S	$P'(K)=P'(\pi)=-1$
粲数 C	$P'(\mathrm{D})=P'(\pi)=-1$
底数 B	$P'(\mathrm{B})=P'(\pi)=-1$

现在粒子表中列出的宇称实验值，都是按上述约定标准定出来的.

P 宇称在强相互作用和电磁相互作用过程中守恒，但在弱相互作用过程中不守恒. 因此对不直接参与强相互作用和电磁相互作用的中微子，没有确定的 P 宇称.

§6.7 CP 变 换

1. CPT 定理

量子场论中证明了一个基本定理即 CPT 定理. 这个定理给出：如果所讨论的场是定域场，即场所对应的粒子是点粒子；场具有相对论所要求的正 Lorentz 协变性；满足自旋统计关系，即自旋为整数的粒子满足玻色统计，自旋为半整数的粒子满足费米统计，则运动规律在 CPT 联合变换下不变.

CPT 定理的一个直接的推论是反粒子和粒子的质量、寿命、

自旋磁矩的 g 因子都完全相同，并且粒子的某一衰变道的衰变速率和 C 变换后反粒子的相应的衰变道的衰变速率相等．CPT 定理在相当高的精度下为实验所证实．由于 CPT 定理成立的三个基本条件都是相当基本的，一般总是能够满足的，它被实验很好地证实也是很可以理解的．

2．弱相互作用的 CP 不变性

1957—1958 年建立的普适费米弱相互作用理论，很好地概括了弱相互作用过程中宇称可以不守恒的要求，并且很快地得到实验的验证．按照这个理论，弱相互作用过程中 C 宇称也可以不守恒，但是 CP 宇称还是守恒的．CP 变换不变性的物理含意是：两个通过 CP 变换相联系的过程，其演化性质和概率分布完全相同．例如对于 π^+ 介子的衰变过程 $\pi^+\to\mu^+\nu$，经过 CP 变换，π^+ 介子将变为 π^- 介子，同时运动方向将反向；μ^+ 将变为 μ^-，同时运动方向将反向，但自旋方向不变，这反映为左旋将变为右旋，右旋将变为左旋；中微子 ν 也将变为它自己的反粒子，中微子的自旋为 $\frac{1}{2}$，由于它的静止质量为零，左旋分量和右旋分量是分开的，它只有左旋分量，这样经过 CP 变换后得到的反中微子应该是一个自旋为 $\frac{1}{2}$，静止质量为零的右旋粒子．弱相互作用的 CP 不变性要求 π^+ 介子和 π^- 介子的这两个衰变过程的性质和衰变宽度完全相同，实验也确实很好地验证了这一点．

由于中微子不直接参与强相互作用和电磁相互作用，但可以直接参与弱相互作用，中微子和反中微子之间不是由 C 变换相联系而是由 CP 变换相联系，表现为中微子是左旋就决定了反中微子是右旋，实验很好地验证了这个预言．

3．CP 变换的性质

由于 C 变换和 P 变换不对易，CP 和 PC 并不相同，它们互为

逆变换．考察一个粒子 A 的态$|A\rangle$，CP 变换给出

$$CP|A\rangle=C'(A)P'(A)|\bar{A}\rangle,$$

再作一次 CP 变换给出

$$\begin{aligned}CPCP|A\rangle&=C'(A)P'(A)CP|\bar{A}\rangle\\&=C'(A)C'(\bar{A})P'(A)P'(\bar{A})|A\rangle\\&=P'(A)P'(\bar{A})|A\rangle\\&=(-1)^{2s}|A\rangle,\end{aligned}$$

其中 s 是粒子A的自旋．这表明所有粒子都是变换

$$F=CPCP$$

的本征态，其本征值对费米子为负，对玻色子为正．

再考虑变换

$$F^{+}=PCPC$$

作用于粒子A的态$|A\rangle$，结果同样为

$$\begin{aligned}PCPC|A\rangle&=C'(A)P'(\bar{A})PC|\bar{A}\rangle\\&=C'(A)C'(\bar{A})P'(A)P'(\bar{A})|A\rangle\\&=P'(A)P'(\bar{A})|A\rangle\\&=(-1)^{2s}|A\rangle,\end{aligned}$$

亦即对于任意粒子 A 的态$|A\rangle$，都有

$$F|A\rangle=F^{+}|A\rangle,$$

这表明普遍有

$$F=F^{+}.$$

F 变换有很直接的物理意义，它可以被用来辨认费米子和玻色子．

C 变换是一个二阶循环群的生成元，P 变换也是一个二阶循环群的生成元．由于从物理含义来看 C 变换和 P 变换并不对易，它们生成的群不是简单的直乘．由 C 变换和 P 变换生成的群是一个 8 阶有限群，其中的元素除单位元 1，C 变换和 P 变换外，还有 $CP, PC, \hat{C}=PCP, \hat{P}=CPC$，$F=CPCP=PCPC$．这个群有 5 个

二阶循环群的子群，其生成元分别为 $C,P,\hat{C},\hat{P},F$. 另一个子群是由 CP 变换或 PC变换生成的 4 阶循环群，元素为 $1,CP,F,PC$.

4. 内禀 CP 宇称

纯中性粒子有确定的 CP 宇称，其值就等于该粒子的 C 宇称和 P 宇称的乘积.

考察正反粒子组成的纯中性系统在CP变换下的行为，由于正反粒子的内禀宇称之积为$(-1)^{2s}$，相对轨道角动量的宇称为$(-1)^L$，正反粒子组成的纯中性系统的 C 宇称为$(-1)^{L+S}$，正反粒子组成的纯中性系统是 CP 变换的本征态，其本征值与轨道角动量无关，只与合自旋有关，取值为$(-1)^{S-2s}$.

特别是正反赝标介子组成的系统，由于赝标介子的自旋为零，合自旋也一定为零，这系统的 CP 宇称一定为正，亦即这系统的 C 宇称和 P 宇称或者同为正的，或者同为负的.

5. K^0 介子的弱相互作用行为

K^0 介子和它的反粒子 $\overline{K}^0$介子是不同的粒子，但是通过弱相互作用衰变时，它们之间的差别都不是守恒量，从衰变行为无法把它们彼此区分开，并且它们衰变时应表现为相当于纯中性粒子的行为.

由于弱相互作用下在相当好的近似下保持 CP 变换不变性，仅有约千分之几的 CP 破坏效应，先暂时略去 CP 破坏部分，只考虑弱相互作用具有 CP 变换不变性. K^0 介子在通过弱相互作用而衰变时，应作为 CP 宇称为正的态和 CP 宇称为负的态的叠加态，这两个态分别按 CP 宇称守恒的要求而衰变. 引入 CP 变换的本征态 K_S 和 K_L，它们对应的本征值分别为$+1$和-1:

$$|K_S\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle+CP|K^0\rangle),$$

$$|K_L\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle-CP|K^0\rangle),$$

这样 K^0 介子态和 $\bar{K}^0$ 介子态可分别表为

$$|K^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S\rangle+|K_L\rangle),$$

$$|\bar{K}^0\rangle=C|K^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L\rangle-|K_S\rangle),$$

K^0 介子和 $\bar{K}^0$ 介子在衰变时，都是一部分表现为 CP 宇称为正的 K_S 介子，一部分表现为 CP 宇称为负的 K_L 介子. 仅从衰变行为来看，不可能区分开 K^0 介子和 $\bar{K}^0$ 介子.

K_S 介子和 K_L 介子的主要衰变方式中没有二体纯轻子衰变，只有三体半轻子衰变和强子衰变. 强子衰变可以是衰变成两个或三个 π 介子. 但是两个 π 介子组成的中性系统的 CP 宇称为 $+1$，如果弱相互作用具有 CP 变换不变性，则只有 K_S 介子才能衰变到两个 π 介子末态，K_L 介子的主要衰变方式中没有二体衰变. 由于二体衰变的末态相空间远比用初态质量无量纲化后的三体衰变末态相空间要大，K_S 介子的平均寿命远比 K_L 介子的平均寿命要短，分别为：

$$\tau(K_S)=(0.8922\pm0.0020)\times10^{-10}\text{ 秒},$$

$$\tau(K_L)=(5.17\pm0.04)\times10^{-8}\text{ 秒},$$

两者相差约 580 倍.

6. 正反中性 K 介子所组成的系统

考察正反中性 K 介子所组成的系统. 如果略去弱相互作用中的少量的 CP 破坏，正反中性 K 介子都将表现为 K_S 和 K_L，并且 K_S 和 K_L 都应该是 CP 变换的本征态，K_S 的 CP 宇称为正，K_L 的 CP 宇称为负. 尽管这个正反中性 K 介子所组成的系统的 CP 宇称一定为正，但由于正反中性 K 介子之间的相对轨道角动量的不同，实验上观察到的衰变行为表现还可以有两种情形：

$$K_SK_L,\qquad P'=-1,\ C'=-1,\ L=1,3,5,\cdots;$$

$K_S K_S$ 和 $K_L K_L$，　　$P' = +1, C' = +1, L = 0, 2, 4, \cdots$.

如果这对正反K介子组成的系统具有确定同位旋，从前面的讨论得出，只有两种可能的情形：

$$当\ I = 0\ 时, G' = (-1)^L;$$

$$当\ I = 1\ 时, G' = (-1)^{L+1}.$$

这两种情形中 L 的奇偶性起了重要作用.

7. K^0 介子衰变中的 CP 不守恒

弱相互作用中的 CP 不守恒首先是在中性K介子的衰变中观察到的. 如果弱相互作用中 CP 严格守恒，中性K介子衰变时表现为的 K_S 介子和 K_L 介子都应是 CP 变换的本征态，CP 宇称为负的 K_L 介子将不能衰变为两个π介子. 然而实验上发现 K_L 介子仍有很小的但不为零的分支比衰变为两个π介子，这就表明弱相互作用中含有少量的 CP 不守恒，K_S 介子和 K_L 介子都不再是 CP 变换的本征态. K_S 介子和 K_L 介子的表达式也要相应地修改为

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}}[(1+\varepsilon)|K^0\rangle + (1-\varepsilon)CP|K^0\rangle],$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}}[(1+\varepsilon)|K^0\rangle - (1-\varepsilon)CP|K^0\rangle].$$

其中 ε 是一个复参量，描写 CP 不守恒成分所占比例，$\varepsilon = 0$ 时即 CP 守恒. 超弱相互作用理论预言

$$\mathrm{Re}\ \ \varepsilon = (1.639 \pm 0.014) \times 10^{-3},$$

$$\arg\ \ \varepsilon = (43.67 \pm 0.13)^\circ.$$

现有实验给出的结果为

$$\mathrm{Re}\ \ \varepsilon = (1.630 \pm 0.083) \times 10^{-3},$$

$$\arg\ \ \varepsilon = (44.6 \pm 1.2)^\circ,\ \ 对\ \pi^+\pi^-\ 衰变;$$

$$\arg\ \ \varepsilon = (48.5 \pm 3.1)^\circ,\ \ 对\ \pi^0\pi^0\ 衰变.$$

实验符合超弱相互作用理论的预言.

为了给弱相互作用下 CP 破坏的程度以定量的描写，可以通过 K_L 介子和 K_S 介子的双 π 衰变来测量

$$|\eta_{+-}|=[\Gamma(K_L\to\pi^+\pi^-)/\Gamma(K_S\to\pi^+\pi^-)]^{1/2},$$

$$|\eta_{00}|=[\Gamma(K_L\to\pi^0\pi^0)/\Gamma(K_S\to\pi^0\pi^0)]^{1/2}.$$

如果弱相互作用具有 CP 变换不变性，则 $|\eta_{+-}|=|\eta_{00}|=0$. 实验测量给出的结果为:

$$|\eta_{+-}|=(2.268\pm0.023)\times10^{-3},$$

$$|\eta_{00}|=(2.253\pm0.024)\times10^{-3}.$$

这说明在弱相互作用下，CP 破坏效应约占千分之二左右.

§6.8 全同粒子交换变换

1. 全同粒子交换变换的绝对守恒性

考察 n 个全同粒子组成的系统，定义 P_{ij} 为第 i 个粒子与第 j 个粒子交换的变换. 显然，P_{ij} 与 C 变换和 P 变换类似，也是一个 $P_{ij}^2=1$ 的分立变换. 更广地可以考虑这 n 个粒子间的任意置换，所有这些置换的整体构成一个 S_n 群. 然而，S_n 群中的所有置换都可以分解成许多交换变换的接续进行，因此重要的是研究最简单的交换变换 P_{ij}, P_{ij} 和 1 构成一个 S_2 群.

按照全同性原理，P_{ij} 对全同粒子的作用并不改变态，并且运动规律对全同粒子是不可分辨的，因此在 P_{ij} 作用下哈密顿量 H 不变，即 $P_{ij}H=HP_{ij}$. 由 Noether 定理给出，P_{ij} 在各种相互作用下都是守恒量.

P_{ij} 的本征值为 ±1，它把一切粒子分为两大类. 自旋统计关系的研究给出：本征值为正的粒子自旋为整数，波函数为完全对称的，这类粒子统称玻色子；本征值为负的粒子自旋为半整数，波函数为完全反对称的，这类粒子统称费米子. P_{ij} 是一个严格守恒量

的物理含义在于：每一种粒子是费米子还是玻色子是确定的，任一种粒子在其存在的时间内不可能改变 P_{ij} 的本征值，亦即其波函数是完全对称的还是完全反对称的这两种情况不能互相转化.

P_{ij} 的本征值也可表为 $(-1)^{2s}$，这和前面讨论的 F 的本征值形式上相同，但实际上完全不同. 对于一个粒子的态，F 的本征值为 $(-1)^{2s}$，这时 P_{ij} 并没有本征值，P_{ij} 只在有多个全同粒子时才有作用. 对于多个不同粒子组成的系统，P_{ij} 并没有本征值. 即使对多个全同粒子所组成的系统，P_{ij} 的作用也只涉及第 i 个和第 j 个粒子，而 F 则涉及所有的粒子，其本征值为所有各粒子贡献的乘积. 例如有两个全同粒子组成的系统，P_{ij} 的本征值为 $(-1)^{2s}$ 但这时由于有两个粒子，F 的本征值应是两个全同粒子贡献的乘积，即 $(-1)^{2s}\cdot(-1)^{2s}=1$，两者并不相同.

全同粒子交换变换 P_{ij} 和 C 变换、P 变换都是分立变换，但它们的性质还是有所不同. C 变换和 P 变换在弱相互作用过程中不守恒而 P_{ij} 则是严格守恒量；然而 P_{ij} 是定义在全同粒子存在的时间内，亦即只对交换所涉及的粒子数不改变的过程中 P_{ij} 才有明确的含义。

另一方面对于任何全同粒子来说，P_{ij} 的含义都是明确的，并取本征值 $+1$ 或 -1. 对于 C 变换来说，只有纯中性粒子才是 C 变换的本征态. P 变换下粒子内部波函数的变换性质需要利用 P 不变性来确定. 这些都是它们之间的差异，是由这几种变换物理上含义的不同所带来的.

2. 全同粒子组成系统的选择规则

对于两个全同粒子组成的系统，若两粒子间轨道角动量为 L，总自旋为 S. P_{ij} 作用后，根据自旋统计关系给出

$$(-1)^{L+S+1}=-1\text{，对费米子}$$

$$(-1)^{L+S}=+1\text{，对玻色子}$$

因此不论费米子还是玻色子，两个全同粒子组成的系统都必须满足

$$L+S=\text{偶数}.$$

3. 广义全同粒子组成系统的选择规则

强相互作用下，同位旋守恒把同一同位旋多重态中的不同电荷态联系在一起，可以作为同一种粒子在同位旋空间中的不同态。因此，只要考虑了同位旋空间中全同粒子交换算符本征值的贡献，就可以把同一同位旋多重态中各粒子都作为全同粒子来对待.

同位旋对交换算符本征值的贡献与自旋类似，即：

$$\text{对半整数同位旋粒子贡献}\quad (-1)^{I+1},$$

$$\text{对整数同位旋粒子贡献}\quad (-1)^{I},$$

其中 I 为两个粒子的总同位旋，它们也可统一表为：

$$(-1)^{I-2i},$$

其中 i 为一个粒子的同位旋. 考虑同位旋后，全同性的选择定则也可以表为

$$L+S+I-2i=\text{偶数}.$$

现在粒子物理中已认识到有比同位旋对称性更高的对称性存在，上述对于同位旋对称性和交换算符关系的讨论都可以类似地推广到这些更高的对称性上去.

例 1. 考虑氘核，它由质子 p 和中子 n 组成，因为它们的自旋和同位旋都是$\frac{1}{2}$，按上面的讨论有

$$L+S+I-2i=\text{偶数},$$

实验上已确定 $S=1$，L 是 0 和 2 的混合，因此 I 必须为偶数. 但 I 只能是 0 或 1，所以 I 只能是零. 也就是说没有与氘核对应的 (pp) 或 (nn) 束缚态存在，实验上也确实没有观察到这样的态存在.

例 2. 考察两个 π 介子组成的系统. 因为 π 介子自旋为 0,同位旋为 1,玻色统计性要求

$$(-1)^{L+I}=+1,$$

因此 L 与 I 的奇偶性应相同,即

$$I=0,2\text{ 时}, L=\text{偶数};$$

$$I=1\text{ 时},\quad L=\text{奇数}.$$

另一方面,两个 π 介子组成的系统的总角动量等于轨道角动量

$$J=L,$$

宇称为

$$P=(-1)^L,$$

两个 π 介子的 G 宇称为正,相应中性分量的 C 宇称为

$$C'=G'(-1)^I=(-1)^I,$$

这样两个 π 介子组成的系统的量子数只能取下表中的值:

J^{PC}	I^G	粒子组态
偶$^{++}$	0^+	$\pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$
偶$^{++}$	2^+	$\pi^-\pi^-$, $\pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^0$, $\pi^-\pi^0$, $\pi^+\pi^+$, $\pi^-\pi^-$
奇$^{--}$	1^+	$\pi^+\pi^-$, $\pi^+\pi^0$, $\pi^-\pi^0$

其中 C 宇称的值是指中性分量的 C 宇称, $\pi^0\pi^0$ 系统的 C 宇称为正因此在 $J^{PC}=$奇$^{--}$情形不会有 $\pi^0\pi^0$出现.

4. 电荷共轭交换变换

粒子和反粒子是同一种场的不同激发态, 它们之间通过 C 变换联系起来. 因此, 粒子和反粒子之间应存在有通过 C 变换来实现的全同性. 这样在正反粒子之间应该用 CP_{ij} 来代替 P_{ij}.

考察一对正反粒子组成的系统, 这是一个纯中性系统. 如果把正反粒子交换, 系统未变但态变了, 但如再作 C 变换则态仍复原. 若这系统的 C 宇称为 C',则 CP_{ij} 作用的结果:

$$C'(-1)^{L+S+1}=-1, \text{对费米子;}$$
$$C'(-1)^{L+S}=+1, \text{对玻色子.}$$

因此不论对费米子还是玻色子，一对正反粒子组成的系统，其C宇称为

$$C'=(-1)^{L+S},$$

这正是过去用过的公式的证明.

赝标介子的自旋为零，所以$\pi^+\pi^-$，K^+K^-和$K^0\overline{K}^0$系统的C宇称为

$$C'=(-1)^{L},$$

它们的CP宇称则恒为$+1$，$K^0\overline{K}^0$系统的衰变行为则随轨道角动量的不同而不同，表现为

$$K_SK_L, \qquad C'=P'=-1, \quad L=1,3,5,\cdots;$$
$$K_SK_S \text{ 和 } K_LK_L, \qquad C'=P'=+1, \quad L=0,2,4\cdots.$$

§6.9 介子共振态衰变过程的对称性分析

1. 守恒定律

粒子物理世界中的各种对称性及其适用范围可以概括表述为表 6.1 和表 6.2.

表 6.1 相加性守恒定律

连续对称性守恒量												
守恒量	E,P	J	J_3	b	L_e	L_μ	L_τ	I	I_3	S	C	B
强相互作用	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
电磁相互作用	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	○
弱相互作用	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×
○表示守恒　×表示不守恒												

表 6.2　相乘性守恒定律

分立对称性守恒量					
守 恒 量	C	P	CP	G	P_{ij}
强相互作用	○	○	○	○	○
电磁相互作用	○	○	○	×	○
弱相互作用	×	×	⊗	×	○
○表示守恒　×表示不守恒					
⊗表示守恒，但有时有约 0.002的不守恒成分					

其中 L_e、L_μ、L_τ 分别为电子轻子数、μ 轻子数、τ 轻子数，它们类似于重子数，也是在三种相互作用中都守恒的守恒量.

2. 离心位垒与等效耦合常数分析

在利用守恒定律对介子衰变过程作分析时，判断衰变分波和离心位垒的影响是很重要的. 量子力学普遍给出：在粒子衰变时，如果轨道角动量为 L，则衰变概率正比于 k^{2L+1}，其中 k 是在初态质心系里末态粒子的衰变动量. 为了去除量纲的影响，可表为概率正比于

$$\left(\frac{k}{m}\right)^{2L+1}$$

其中 m 是初态粒子的质量. 这一项的效应是当衰变动量不大时，衰变概率随 L 的增加而迅速减少，这一效应通常称为离心位垒. 如果粒子作 3 体衰变，则有两个相对轨道角动量 L_1 和 L_2，它们都有离心位垒效应，但这时末态 3 个粒子的衰变动量并不取确定值，它们的值也并不相同. 利用离心位垒作量级估计和分析时，常取末态最大衰变动量 k_M 来代替 k_1 和 k_2，由此估计衰变概率对 L_1 和 L_2 的依赖因子为正比于 $k_M^{2(L_1+L_2)}$，无量纲化后这因子为

$$\left(\frac{k_M}{m}\right)^{2(L_1+L_2)}$$

可见，当粒子作 n 体衰变时，有 $n-1$ 个相对角动量 L_1，L_2，…，L_{n-1}. 考察离心位垒效应，重要的是它们的总和 $L_1+L_2+\cdots+L_{n-1}$. 当一种粒子的某一种衰变方式可以通过几种分波来进行时，一般来说低分波的贡献为主. 衰变分波对估计衰变概率的量级有重要意义.

考虑二体衰变过程 A→B+C，衰变概率用衰变宽度 Γ 描写. 按上面的讨论，Γ 应正比于 k^{2L+1}，同时 Γ 的量纲和质量的量纲相同，因此可以表为

$$\Gamma=\eta\alpha\frac{k^{2L+1}}{m^{2L}},$$

其中 α 为等效耦合常数，它的数值大小反映相互作用的强弱，η 是一个由相互作用机理所决定的数量，它的量级一般为 $O(1)$，其值可由场论计算给出. α 和 η 都是无量纲的量. 对于多体衰变过程，上式推广为

$$\Gamma=\eta\alpha\frac{k_M^{2(L_1+L_2+\cdots+L_{n-1})+1}}{m^{2(L_1+L_2+\cdots+L_{n-1})}}.$$

利用实验上测得的衰变宽度 Γ，可以估算 α 的量级. 当初态粒子的质量小于或等于 10GeV 的量级时，如果 $\alpha\approx O(1)$，相互作用是强相互作用；如果是电磁相互作用或弱相互作用，则有 $\alpha\ll O(1)$. 这个性质常被用来作为推测相互作用性质，并进而推测粒子性质的判据.

3. 普通介子共振态衰变行为

普通介子共振态具有很强的强相互作用对称性，除了具有确定的质量和宽度外，它们的重子数 b，奇异数 S，粲数 C，底数 B 都为零，并且具有确定的 I^G、J^{PC} 量子数. 对于新发现的普通介子共振态的性质，在根据其实验行为进行唯象分析研究时，需要对各种可能 I^G、J^{PC} 量子数的普通介子共振态通过强相互作用衰变到多个介子末态的行为进行普遍的系统的分析.

质量小于或等于 10 GeV 量级的普通介子共振态通过强相互作用衰变时，主要的衰变方式常常是纯介子末态．特别是质量小于 3GeV 的普通介子共振态衰变时更为明显．从实际需要出发主要要讨论以下几种末态：$n\pi$，$(K\bar{K})n\pi$，$n\eta$，$\eta\pi$，$\eta\pi\pi$，$\eta\eta\pi$，$\eta\eta\pi\pi$，$\eta(K\bar{K})$，$\eta\eta(K\bar{K})$，$\eta\pi(K\bar{K})$，其中 n 为对称性可以允许的零或正整数．

4．$n\pi$ 末态的对称性质

首先考虑末态粒子都是 π 介子的情形．首先 G 宇称守恒决定末态可以有奇数个 π 介子还是偶数个 π 介子，然后同位旋守恒决定末态 π 介子的荷电状态，并决定这些末态 π 介子在同位旋空间的对称反对称性质．由于 π 介子是玻色子，多个 π 介子的系统所处的状态必须是完全对称态，这些末态 π 介子在同位旋空间的对称反对称性质就决定了这些末态 π 介子在普通空间中的对称反对称性质．由于 π 介子的自旋为零，π 介子在普通空间中的对称反对称性质完全由它们之间的相对轨道角动量来决定，而这些轨道角动量的取值又必须满足总角动量守恒的要求．轨道角动量给定后，也就给出了在衰变离心位垒中起作用的分波位垒幂次，即各轨道角动量量子数之和 L，考虑到 π 介子的质量很小，衰变动量可能很大，有时也需要考虑相对论极限下的分波位垒幂次 Λ．

5．$(K\bar{K})n\pi$ 末态的对称性质

由于 $K\bar{K}$ 系所受对称性限制比 $\pi\pi$ 系要小，从实际需要来看，我们只需讨论 $K\bar{K}$，$K\bar{K}\pi$，$K\bar{K}\pi\pi$ 末态性质即够了．

对于 $K\bar{K}$ 系，总同位旋 $I=I_{K\bar{K}}=0$ 或 1．令 $l_{K\bar{K}}$ 为 $K\bar{K}$ 系的相对角动量，则系统的自旋为 $J=l_{K\bar{K}}$，宇称为 $P=(-)^{l_{K\bar{K}}}$，G宇称为 $G=(-)^{I_{K\bar{K}}+l_{K\bar{K}}}$，中性系的 C 宇称为 $C=(-)^{l_{K\bar{K}}}$．

对于 $K\bar{K}\pi$ 系，令 l 表 $K\bar{K}$系与 π 介子的相对角动量，见图 6.1，则系统的性质为

$$J=I_{K\bar{K}}+I, P=(-)^{l_{K\bar{K}}+l+1}, G=(-)^{I_{K\bar{K}}+l_{K\bar{K}}+1}.$$

当总同位旋 $I=0$ 时，只能 $I_{K\bar{K}}=1$，因此有 $G=(-)^{l_{K\bar{K}}}$，末态为

$$K^+\bar{K}^0\pi^-, K^-K^0\pi^+, (K\bar{K})^0\pi^0.$$

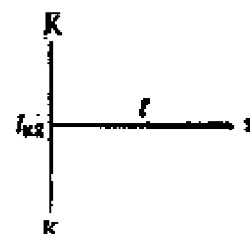


图 6.1 $K\bar{K}\pi$ 系轨道角动量

当 $I=1$ 时可以有两种情形：

(1) $I_{K\bar{K}}=0$，这时 $G=(-)^{l_{K\bar{K}}+1}$，末态为

$Q=0 \quad (K\bar{K})^0\pi^0$

$Q=\pm1 \quad (K\bar{K})^0\pi^{\pm}$

(2) $I_{K\bar{K}}=1$，这时 $G=(-)^{l_{K\bar{K}}}$，末态为

$Q=0 \quad K^+\bar{K}^0\pi^-, K^-K^0\pi^+$

$Q=\pm1 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^0, (K\bar{K})^0\pi^{\pm}$

当 $I=2$ 时，只能 $I_{K\bar{K}}=1$，这时有 $G=(-)^{l_{K\bar{K}}}$，末态为

$Q=0 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}, (K\bar{K})^0\pi^0$

$Q=\pm1 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^0, (K\bar{K})^0\pi^{\pm}$

$Q=\pm2 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^{\pm}$

对于 $K\bar{K}\pi\pi$ 系，令 $l_{\pi\pi}$ 和 $I_{\pi\pi}$ 分别表 $\pi\pi$ 系的相对角动量和同位旋，见图 6.2，则系统的性质为

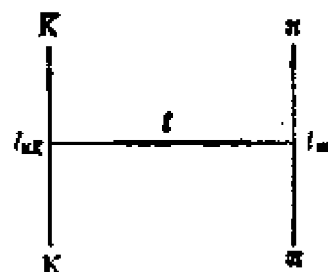


图 6.2 $K\bar{K}\pi\pi$ 系轨道角动量

$$J=I_{K\bar{K}}+I_{\pi\pi}+I, \quad P=(-)^{l_{K\bar{K}}+l_{\pi\pi}+l}, G=(-)^{I_{K\bar{K}}+l_{K\bar{K}}}.$$

当 $I=0$ 时有两种情形：

(1) $I_{K\bar{K}}=0, I_{\pi\pi}=0$，这时 $P=(-)^{l_{K\bar{K}}+l}, G=(-)^{l_{K\bar{K}}}$，末态为

$$(K\bar{K})^0(\pi\pi)^0.$$

(2) $I_{K\bar{K}}=1, I_{\pi\pi}=1$，这时 $P=(-)^{l_{K\bar{K}}+l+1}, G=(-)^{l_{K\bar{K}}+1}$，

末态为

$$(\mathrm{K\overline{K}})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0},\ (\mathrm{K\overline{K}})^{0}\pi^{+}\pi^{-}.$$

当 $I=1$ 时有四种情形:

(1) $I_{\mathrm{K\overline{K}}}=0, I_{\pi\pi}=1$, 这时 $P=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}+l+1}, G=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}}$, 末态为

$Q=0\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}\pi^{+}\pi^{-}$

$Q=\pm1\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}\pi^{\pm}\pi^{0}$

(2) $I_{\mathrm{K\overline{K}}}=1, I_{\pi\pi}=0$, 这时 $P=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}+l}, G=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}+1}$, 末态为

$Q=0\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}(\pi\pi)^{0}$

$Q=\pm1\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{\pm}(\pi\pi)^{0}$

(3) $I_{\mathrm{K\overline{K}}}=1, I_{\pi\pi}=1$, 这时 $P=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}+l+1}, G=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}+1}$, 末态为

$Q=0\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$

$Q=\pm1\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}\pi^{\pm}\pi^{0}, (\mathrm{K\overline{K}})^{\pm}\pi^{+}\pi^{-}$

(4) $I_{\mathrm{K\overline{K}}}=1, I_{\pi\pi}=2$, 这时 $P=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}+l}, G=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}\pm1}$, 末态为

$Q=0\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}(\pi\pi)^{0}, (\mathrm{K\overline{K}})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$

$Q=\pm1\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}\pi^{\pm}\pi^{0}, (\mathrm{K\overline{K}})^{\pm}(\pi\pi)^{0}, (\mathrm{K\overline{K}})^{\mp}\pi^{\pm}\pi^{\pm}$

当 $I=2$ 时有三种情形:

(1) $I_{\mathrm{K\overline{K}}}=0, I_{\pi\pi}=2$, 这时 $P=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}+l}, G=(-)^{l_{\mathrm{K\overline{K}}}}$, 末态为

$Q=0\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}(\pi\pi)^{0}$

$Q=\pm1\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}\pi^{\pm}\pi^{0}$

$Q=\pm2\quad (\mathrm{K\overline{K}})^{0}\pi^{\pm}\pi^{\pm}$

(2) $I_{K\bar{K}}=1, I_{\pi\pi}=1$，这时 $P=(-)^{l_{K\bar{K}}+l+1}, G=(-)^{l_{K\bar{K}}+l}$，末态为

$Q=0 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$

$Q=\pm1 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^{+}\pi^{-}, (K\bar{K})^{0}\pi^{\pm}\pi^{0}$

$Q=\pm2 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^{\pm}\pi^{0}$

(3) $I_{K\bar{K}}=1, I_{\pi\pi}=2$，这时 $P=(-)^{l_{K\bar{K}}+l}, G=(-)^{l_{K\bar{K}}+l}$ 末态为

$Q=0 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}, (K\bar{K})^{0}(\pi\pi)^{0}$

$Q=\pm1 \quad (K\bar{K})^{\pm}(\pi\pi)^{0}, (K\bar{K})^{0}\pi^{\pm}\pi^{0}, (K\bar{K})^{\mp}\pi^{\pm}\pi^{\pm}$

$Q=\pm2 \quad (K\bar{K})^{\pm}\pi^{\pm}\pi^{0}, (K\bar{K})^{0}\pi^{\pm}\pi^{\pm}$

此外，值得注意的是，当末态中出现 $K^0\bar{K}^0$ 时，当 $l_{K\bar{K}}$ 为偶数时表现为 $K_L^0K_L^0$ 和(或)$K_S^0K_S^0$，当 $l_{K\bar{K}}$ 为奇数时表现为 $K_L^0K_S^0$.

6. 含 η 介子末态的对称性质

η 介子的同位旋为零，$G=+, J^{PC}=0^{-+}$，由此得出 n 个 η 介子组成的系统也是同位旋为零，$G=+$. 其自旋和宇称完全由玻色统计决定：

ηη 系统，$J^{PC}=$偶$^{++}$；

ηηη 系统，$J^{PC}=$偶$^{-+}$；

ηηηη 系统，$C=+$；J^{P} 没有限制.

对于含 η 介子和其它介子的末态，增加 η 介子并不改变同位旋和 G 宇称，主要的变化是伴随每一个 η 介子都会带来一个轨道角动量，从而带来总角动量和宇称的改变.

7. 普通介子共振态强衰变的对称性

根据上述对称性分析，可以给出具有各种可能 I^G，J^{PC} 量子数的普通介子共振态通过强相互作用衰变到多个赝标介子末态的衰变道和衰变分波，所得的结果列如表 6.3、表 6.4 和表 6.5.

表 6.3　$I=0$ 各量子数共振态的衰变末态及其衰变分波

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
0	0^{++}	+	0	$(\pi\pi)^0$				0	0
				$(\pi\pi\pi\pi)^0$				0	0
				$(K\bar{K})^0_+$	0			0	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	1	0	2	
				$\eta\eta$				0	
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				0	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_+$				0	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				0	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				0	
0	0^{+-}	−	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				5	4
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
0	0^{-+}	+	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				5	5
				$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				9	7
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	2	2	1	5	
				$\eta\eta\eta$				0	
				$\eta(\pi\pi)^0$				0	
				$\eta(K\bar{K})^0_+$				0	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				5	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				5	

续表

I	J^{PC}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
0	0^{--}	—	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				6	3
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				4	3
				$(K\bar{K})^0_\pm\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_\pm\pi^+\pi^-$	0	1	2	3	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	0	1	2	3	
				$(K\bar{K})^0(\pi\pi)^0$	1	2	2	5	
				$\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				3	
0	1^{++}	+	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				4	3
				$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				6	5
				$(K\bar{K})^0_\pm\pi^0$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^0_\pm\pi^+\pi^-$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^0_\pm(\pi\pi)^0$	0	2	2	4	
				$\eta(\pi\pi)^0$				1	
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				4	
				$\eta(K\bar{K})^0_+$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_+$				4	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_\pm$				2	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				2	
0	1^{+-}	—	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				3	2
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				3	2
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^0_\pm\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	0	1	1	2	

续表

I	J^{PC}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
				$\eta(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				2	
0	1^{-+}	+	0	$(\pi\pi\pi\pi)^0$				3	2
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	1	1	1	3	
				$\eta(\pi\pi)^0$				4	
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_+$				1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				1	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				1	
0	1^{--}	−	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				2	2
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				2	2
				$(K\bar{K})^0_-$	1			1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	0	1	0	1	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	0	1	0	1	
				$\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				1	
0	2^{++}	+	0	$(\pi\pi)^0$				2	2
				$(\pi\pi\pi\pi)^0$				2	2
				$(K\bar{K})^0_+$	2			2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	2		1	3	

I	J^{PC}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
0	2^{++}	+	0	$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	2	2	
					0	2	0	2	
					2	0	0	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	1	0	2	
				$\eta\eta$				2	
				$\eta(\pi\pi)^0$				3	
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
0	2^{+-}	−	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				5	4
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				3	3
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	0	1	1	2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
0	2^{-+}	+	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				3	3
				$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				5	4
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	2	1	3	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	1	1	3	
				$\eta\eta\eta$				2	
				$\eta(\pi\pi)^0$				2	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				3	
				$\eta(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_+$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				3	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				3	
0	2^{--}	—	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				4	3
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				4	3
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	2	3	
					1	2	2	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	0	1	0	3	
					2	1	0	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				3	

表 6.4　$I=1$ 各量子数共振态的衰变末态及其衰变分波

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	0^{++}	—	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				2	1
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	

I	J^{PG}	G	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
				$\eta\eta\pi^+\pi^-$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				2	
			1	$(\pi\pi\pi\pi)^+$				2	1
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	1	0	1	2	
				$\eta\eta\pi^+\pi^0$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^+$				2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				2	
1	0^{+-}	+	0	$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-\pi^0$				5	4
				$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0$				5	5
				$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				9	7
				$(K\bar{K})^0_+$	0			0	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	0	2	
				$\eta\pi^0$				0	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_+$				0	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				0	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				0	
			1	$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-\pi^-$				5	5
				$\pi^+\pi^-\pi^-\pi^0\pi^0$				5	4
				$\pi^+\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				7	6
				$(K\bar{K})^+$	0			0	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	0	0	0	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	0^{+-}	+	1	$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	0	2	
				$\eta\pi^+$				0	
				$\eta\eta(K\bar{K})^+$				0	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_+$				0	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				0	
1	0^{-+}	−	0	$\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$				7	6
				$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$				5	4
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	2	1	2	5	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	2	2	5	
				$\eta\pi^+\pi^-$				2	
				$\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				3	
			1	$\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$				5	4
				$\pi^+\pi^0\pi^0\pi^0$				7	6
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	2	1	2	5	
				$\eta\pi^+\pi^0$				2	
				$\eta(K\bar{K})^+$				2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				3	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	0^{-+}	$-$	1	$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				3	
1	0^{--}	$+$	0	$(\pi\pi\pi)^0$				0	0
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^0$				0	0
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	2	2	1	5	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	2	2	1	5	
					2	1	2	5	
				$\eta\eta\pi^0$				0	
				$\eta(K\bar{K})^0_+$				0	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				5	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				5	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				0	0
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^+$				0	0
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	2	2	1	5	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	2	2	1	5	
					2	1	2	5	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	2	1	2	5	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	2	2	1	5	
				$\eta\eta\pi^+$				0	
				$\eta(K\bar{K})^+$				0	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_+$				5	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				5	
1	1^{++}	$-$	0	$\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$				4	3
				$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$				2	2
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		0	1	

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$I_{K\bar{K}}$	$I_{\pi\pi}$	I	L	Λ
1	1^{++}	—	0	$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	0	1	1	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{\pm}\pi^{+}\pi^{-}$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{\pm}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$\eta\pi^{+}\pi^{-}$				1	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{-}$				2	
				$\eta(K\bar{K})^{0}_{\pm}$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^{0}_{\pm}$				2	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{\pm}$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
			1	$\pi^{+}\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$				2	2
				$\pi^{+}\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$				4	3
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{0}$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{0}$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{-}$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	1	2	
				$\eta\pi^{+}\pi^{0}$				1	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{0}$				2	
				$\eta(K\bar{K})^{+}$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^{+}$				2	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{-}$				2	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				2	
1	1^{+-}	+	0	$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$				1	1
				$\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$				3	2
				$\pi^{+}\pi^{-}(\pi\pi)^{0}$				1	1
				$\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$				3	2

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	1^{+-}	+	0	$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	2	2	4	
				$\eta\eta\pi^0$				1	
				$\eta(K\bar{K})^0_+$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				1	1
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^+$				1	1
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	2	2	4	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	0	2	2	4	
				$\eta\eta\pi^+$				1	
				$\eta(K\bar{K})^+$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^+$				2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				2	
1	1^{-+}	−	0	$\pi^+\pi^-$				1	1
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				1	1
				$(K\bar{K})^0_-$	1			1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	0	1	0	1	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	0	1	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$I_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	1^{-+}	—	0	$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	0	0	1	
				$\eta\pi^+\pi^-$				2	
				$\eta\eta\pi^+\pi^-$				1	
				$\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				1	
			1	$\pi^+\pi^0$				1	1
				$(\pi\pi\pi\pi)^+$				1	1
				$(K\bar{K})^+$	1			1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	1	0	1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	1	0	0	1	
				$\eta\pi^+\pi^0$				2	
				$\eta\eta\pi^+\pi^0$				1	
				$\eta(K\bar{K})^+$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^+$				1	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				1	
1	1^{--}	+	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				4	3
				$\pi^0\pi^0\pi^0$				8	5
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				4	3
				$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				8	5
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	0	0	1	1	
					0	1	0	1	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次 $l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	1^{--}	+	0	$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	
				$\eta\pi^0$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_+$				1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				1	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				1	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				4	3
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^+$				4	3
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	0	1	1	
					0	1	0	1	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	0	1	0	1	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	1	3	
				$\eta\pi^+$				1	
				$\eta\eta(K\bar{K})^+$				1	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_+$				1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				1	
1	2^{++}	−	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				2	2
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$\eta\pi^+\pi^-$				3	
				$\eta\eta\pi^+\pi^-$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				2	

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	2^{++}	−	1	$(\pi\pi\pi\pi)^{+}$				2	2
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{0}$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{-}$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	1	2	
				$\eta\pi^{+}\pi^{0}$				3	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{0}$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^{+}$				2	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{-}$				2	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				2	
1	2^{+-}	+	0	$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$				3	3
				$\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$				5	4
				$\pi^{+}\pi^{-}(\pi\pi\pi)^{0}$				3	3
				$\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$				5	4
				$(K\bar{K})^{0}_{+}$	2			2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{0}$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{-}$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}(\pi\pi)^{0}$	0	2	0	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	0	2	0	2	
					0	1	1	2	
				$\eta\pi^{0}$				2	
				$\eta\eta\pi^{0}$				3	
				$\eta\eta(K\bar{K})^{0}_{+}$				2	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{+}$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
			1	$(\pi\pi\pi)^{+}$				3	3

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
				$(\pi\pi\pi\pi)^+$				3	3
				$(K\bar{K})^+$	2			2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	2	0	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	2	0	2	
					0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	0	2	0	2	
				$\eta\pi^+$				2	
				$\eta\eta\pi^+$				3	
				$\eta\eta(K\bar{K})^+$				2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				2	
1	2^{-+}	−	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				3	3
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^-$	0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	2	0	3	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	1	2	0	3	
					1	1	1	3	
				$\eta\pi^+\pi^-$				2	
				$\eta\eta\pi^+\pi^-$				3	
				$\eta(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				3	
1	2^{-+}		1	$(\pi\pi\pi\pi)^+$				3	3

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次 $l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	2^{-+}		1	$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{0}$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{0}$	0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	1	2	0	3	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{-}$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	2	0	3	
					1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	1	1	3	
				$\eta\pi^{+}\pi^{0}$				2	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{0}$				3	
				$\eta(K\bar{K})^{+}$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^{+}$				3	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{-}$				3	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				3	
1	2^{--}	+	0	$(\pi\pi\pi)^{0}$				2	2
				$(\pi\pi\pi\pi)^{0}$				2	2
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{0}$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{+}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{-}$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}(\pi\pi)^{0}$	0	2	1	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	0	2	1	3	
					0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$\eta\eta\pi^{0}$				2	
				$\eta(K\bar{K})^{0}_{+}$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^{0}_{+}$				3	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{+}$				3	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
1	2^{--}	+	0	$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				3	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				2	2
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^+$				2	2
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	2	1	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	2	1	3	
					0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	0	2	1	3	
				$\eta\eta\pi^+$				2	
				$\eta(K\bar{K})^+$				2	
				$\eta\eta(K\bar{K})^+$				3	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				3	

表 6.5　$I=2$ 各量子数共振态的衰变末态及其衰变分波

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	0^{++}	+	0	$(\pi\pi)^0$				0	0
				$(\pi\pi\pi\pi)^0$				0	0
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	0	0	

续表

I	J^{PC}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$		L	Λ
2	0^{++}	+	0	$(K\bar{K})^{0}_{-}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$\eta\eta(\pi\pi)^{0}$				0	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{+}$				0	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				0	
			1	$\pi^{+}\pi^{0}$				0	0
				$(\pi\pi\pi)^{+}$				0	0
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{0}$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{-}$	1	1	0	2	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{0}$				0	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				0	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{+}$				0	
			2	$\pi^{+}\pi^{+}$				0	0
				$(\pi\pi\pi)^{++}$				0	0
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{+}$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{+}$				0	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{+}$				0	
2	0^{+-}	−	0	$\pi^{+}\pi^{-}(\pi\pi\pi)^{0}$				5	4
				$(K\bar{K})^{0}_{+}(\pi\pi)^{0}$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{-}$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次 $l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	0^{+-}		1	$\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$				5	4
				$\pi^+\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$				5	5
				$\pi^+\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				7	6
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^-\pi^-\pi$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	1	2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				2	
			2	$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-\pi^0$				5	4
				$\pi^+\pi^+\pi^0\pi^0\pi^0$				5	5
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^+$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^0$	0	0	0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^+$	1	0	1	2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^+$				2	
2	0^{--}	+	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				5	5
				$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				9	7
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^\pm\pi^\mp\pi^0$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	2	2	1	5	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	2	2	5	
				$\eta(\pi\pi)^0$				0	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				5	
				$\eta\pi^\mp(K\bar{K})^\pm$				5	
			1	$\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$				5	5
				$\pi^+\pi^0\pi^0\pi^0$				7	6
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	0^{-+}		1	$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{0}$	2	2	1	5	
				$\eta\pi^{+}\pi^{-}$				0	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{+}$				5	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				5	
			2	$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}\pi^{0}$				5	5
				$\pi^{+}\pi^{+}\pi^{+}\pi^{-}$				7	6
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{-}$	0		0	0	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^{0}\pi^{+}\pi^{+}$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{+}$	2	2	1	5	
				$\eta\pi^{+}\pi^{+}$				0	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{+}$				5	
2	0^{--}	$-$	0	$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$				2	1
				$\pi^{+}\pi^{-}(\pi\pi)^{0}$				2	1
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{0}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{\mp}\pi^{\pm}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}(\pi\pi)^{0}$	2	2	1	5	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}(\pi\pi)^{0}$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	2	2	1	5	
					2	1	2	5	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{-}$				3	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				3	
			1	$(\pi\pi\pi)^{+}$				2	1
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^{+}$				2	1
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{0}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{0}$	2	2	1	5	
					2	1	2	5	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	2	2	5	

I	J^{PC}	C	Q	衰变末态	分波幂次 $l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	0^{--}		1	$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	2	2	1	5	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	2	1	2	5	
				$(K\bar{K})^-\pi^-\pi^+$	2	2	1	5	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				3	
			2	$\pi^+\pi^+\pi^0$				2	1
				$\pi^+\pi^+(\pi\pi\pi)^0$				2	1
				$(K\bar{K})^+\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_\pm\pi^+\pi^+$	2	2	1	5	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^+$	1	2	2	5	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^0$	2	2	1	5	
					2	1	2	5	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^+$				3	
2	1^{-+}	+	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				4	3
				$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				6	5
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^+\pi^-$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^-\pi^0$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	2	2	4	
					2	0	2	4	
					2	2	0	4	
				$\eta(\pi\pi)^0$				1	
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				4	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^-$				2	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				4	3
				$(K\bar{K})^0_\pm\pi^+$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	1	2	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	1^{++}		1		1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{-}$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{0}$	0	2	2	4	
					2	0	2	4	
					2	2	0	4	
				$\eta\pi^{+}\pi^{0}$				1	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{0}$				4	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{+}$				2	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				2	
			2	$(\pi\pi\pi\pi)^{++}$				4	3
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}$	0		1	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{+}$	0	2	2	4	
					2	0	2	4	
					2	2	0	4	
				$\eta\pi^{+}\pi^{-}$				1	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{+}$				4	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{+}$				2	
2	1^{+-}	—	0	$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$				1	1
				$\pi^{+}\pi^{-}(\pi\pi\pi)^{0}$				1	1
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{0}$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}(\pi\pi)^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}(\pi\pi)^{0}$	0	2	2	4	
					2	0	2	4	
					2	2	0	4	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{-}$				2	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	1^{+-}	—	0	$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
			1	$(\pi\pi\pi)^{+}$				1	1
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^{+}$				1	1
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{-}$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{0}$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{-}$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	0	2	2	4	
					2	0	2	4	
					2	2	0	4	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	0	2	2	4	
					2	0	2	4	
					2	2	0	4	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{-}$				2	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				2	
			2	$\pi^{+}\pi^{+}\pi^{0}$				1	1
				$\pi^{+}\pi^{+}(\pi\pi\pi)^{0}$				1	1
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}$	1		0	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{0}$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{+}$	0	2	2	4	
					2	0	2	4	
					2	2	0	4	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{+}$				2	
2	1^{-+}	+	0	$\pi^{+}\pi^{-}(\pi\pi)^{0}$				1	1
				$\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$				3	2
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{0}$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{-}$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}(\pi\pi)^{0}$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}(\pi\pi)^{0}$	1	0	0	1	

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	1^{-+}	+	0	$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	1	0	0	1	
				$\eta(\pi\pi)^{0}$				4	
				$\eta\eta(\pi\pi)^{0}$				1	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{0}_{+}$				1	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				1	
			1	$(\pi\pi\pi\pi)^{+}$				1	1
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{0}$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^{+}(\pi\pi)^{0}$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	0	1	
				$\eta\pi^{+}\pi^{0}$				4	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{0}$				1	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{0}_{+}$				1	
				$\eta\pi^{0}(K\bar{K})^{+}$				1	
			2	$(\pi\pi\pi\pi)^{-+}$				1	1
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}$	2		2	4	
				$(K\bar{K})^{0}_{+}\pi^{+}\pi^{+}$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{+}\pi^{+}$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^{+}\pi^{+}\pi^{0}$	1	0	0	1	
				$\eta\pi^{+}\pi^{+}$				4	
				$\eta\eta\pi^{+}\pi^{+}$				1	
				$\eta\pi^{+}(K\bar{K})^{+}$				1	
2	1^{--}	−	0	$\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$				4	3
				$\pi^{+}\pi^{-}(\pi\pi\pi)^{0}$				2	2
				$(K\bar{K})^{0}_{-}\pi^{0}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^{0}_{-}(\pi\pi)^{0}$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^{0}$	0	1	0	1	
					0	0	1	1	

I	J^{PC}	G	Q	衰变末态	分波幂次 $l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	1^{--}	—	0	$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	1	1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				1	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				4	3
				$\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$				2	2
				$\pi^+\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$				4	3
				$\pi^+\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				4	3
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	1	0	1	
					0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	0	1	0	1	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	0	0	1	1	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				1	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				1	
			2	$\pi^+\pi^+\pi^0$				4	3
				$\pi^+\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$				2	2
				$\pi^+\pi^+\pi^0\pi^0\pi^0$				4	3
				$(K\bar{K})^+\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^+$	1	0	0	1	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^+$	0	0	1	1	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^0$	0	0	1	1	
					0	1	0	1	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^+$				1	
2	2^{++}	+	0	$(\pi\pi)^0$				2	2
				$(\pi\pi\pi\pi)^0$				2	2
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	2	2	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	2^{++}	$+$	0	$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$\eta(\pi\pi)^0$				3	
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
			1	$(\pi\pi)^+$				2	2
				$(\pi\pi\pi\pi)^+$				2	2
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	0	2	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^-$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	1	1	0	2	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	1	0	1	2	
				$\eta\pi^+\pi^0$				3	
				$\eta\eta\pi^+\pi^0$				2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_+$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				2	
			2	$\pi^+\pi^+$				2	2
				$(\pi\pi\pi\pi)^{++}$				2	2
				$(K\bar{K})^+\pi^+$	2		1	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^+$	0	0	2	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^+$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^0$	1	0	1	2	
					1	1	0	2	
				$\eta\pi^+\pi^+$				3	
				$\eta\eta\pi^+\pi^+$				2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^-$				2	

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar{K}}$	l	l	L	Λ
2	2^{+-}	−	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				3	3
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				3	3
				$(K\bar{K})^0_-\pi^0$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	0	2	2	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	0	0	2	2	
					0	1	1	2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				2	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				3	3
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^+$				3	3
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	0	2	2	
					0	1	1	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	0	2	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	0	1	1	2	
				$(K\bar{K})$ [illegible]	0	0	2	2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				2	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				2	
			2	$\pi^+\pi^+\pi^0$				3	3
				$\pi^+\pi^+(\pi\pi\pi)^0$				3	3
				$(K\bar{K})^+\pi^+$	1		2	3	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^+$	0	0	2	2	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^+$	1	0	1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^0$	0	0	2	2	
					0	1	1	2	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^+$				2	
2	2^{-+}	+	0	$\pi^+\pi^-(\pi\pi)^0$				3	3

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次 $l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	2^{-+}	+	0	$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$				5	4
				$(K\bar{K})^0_+\pi^0$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^0_+(\pi\pi)^0$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
				$(K\bar{K})^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
				$(K\bar{K})^{\pm}\pi^{\mp}\pi^0$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
					1	1	1	3	
				$\eta(\pi\pi)^0$				2	
				$\eta\eta(\pi\pi)^0$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^0_+$				3	
				$\eta\pi^{\mp}(K\bar{K})^{\pm}$				3	
			1	$(\pi\pi\pi\pi)^+$				3	3
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
					1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	1	1	1	3	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
				$\eta\pi^+\pi^0$				2	

续表

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次				
					$l_{K\bar K}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
2	2^{-+}		1	$\eta\eta\pi^+\pi^0$				3	
				$\eta\pi^+(K\bar K)^0_-$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar K)^+$				3	
			2	$(\pi\pi\pi\pi)^{++}$				3	3
				$(K\bar K)^+\pi^+$	0		2	2	
					2		0	2	
				$(K\bar K)^0_+\pi^+\pi^+$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
				$(K\bar K)^0_-\pi^+\pi^+$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
				$(K\bar K)^+\pi^+\pi^0$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
					1	1	1	3	
				$\eta\pi^+\pi^+$				2	
				$\eta\eta\pi^+\pi^+$				3	
				$\eta\pi^+(K\bar K)^+$				3	
2	2^{--}	−	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$				2	2
				$\pi^+\pi^-(\pi\pi\pi)^0$				2	2
				$(K\bar K)^0_-\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar K)^\pm\pi^\mp$	1		1	2	
				$(K\bar K)^0_+(\pi\pi)^0$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
				$(K\bar K)^0_-(\pi\pi)^0$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
				$(K\bar K)^\pm\pi^\mp\pi^0$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
					0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$\eta\pi^0(K\bar K)^0_-$				3	
				$\eta\pi^\mp(K\bar K)^\pm$				3	
			1	$(\pi\pi\pi)^+$				2	2

I	J^{PG}	C	Q	衰变末态	分波幂次 $l_{K\bar{K}}$	$l_{\pi\pi}$	l	L	Λ
				$(\pi\pi\pi\pi\pi)^+$				2	2
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^+\pi^0$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^0$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
					0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^0$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
				$(K\bar{K})^+(\pi\pi)^0$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^-$	0	1	2	3	
					2	1	0	3	
				$(K\bar{K})^-\pi^+\pi^+$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^0_-$				3	
				$\eta\pi^0(K\bar{K})^+$				3	
			2	$\pi^+\pi^+\pi^0$				2	2
				$\pi^+\pi^+(\pi\pi\pi)^0$				2	2
				$(K\bar{K})^+\pi^+$	1		1	2	
				$(K\bar{K})^0_+\pi^+\pi^+$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
				$(K\bar{K})^0_-\pi^+\pi^+$	1	0	2	3	
					1	2	0	3	
				$(K\bar{K})^+\pi^+\pi^0$	0	2	1	3	
					2	0	1	3	
					2	1	0	3	
					0	1	2	3	
				$\eta\pi^+(K\bar{K})^+$				3	

在这些表中，对于仅由 π 介子组成的末态，给出了粒子数不超过 5 的各道，对于含 $(K\bar{K})$ 或 η 介子的末态，给出了粒子数不超

过 4 的各道．表中列出了所有同位旋 $I\leqslant 2$、自旋 $J\leqslant 2$ 的态．

用括弧括在一起的多介子系，是指在给定电荷下一切可能的组合，例如

$(\pi\pi\pi)$　　表 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 和 $\pi^0\pi^0\pi^0$;

$(K\bar{K})^0_+$　　表 K^+K^-, K_LK_L 和 K_SK_S;

$(K\bar{K})^0_-$　　表 K^+K^- 和 K_LK_S.

其中 $(K\bar{K})^0$ 系下标的＋号或－号表示 $(K\bar{K})^0$ 系的 C 宇称，它决定了 $K^0\bar{K}^0$ 是以 K_LK_L 和 K_SK_S 的形式还是以 K_LK_S 的形式出现．此外为了方便，把 $K^+\bar{K}^0$ 和 K^0K^- 分别记作 $(K\bar{K})^+$ 和 $(K\bar{K})^-$．对于总电荷不为零的态，只列出电荷为正的情形，电荷为负的情形可以从电荷为正的情形将粒子换为相应的反粒子得到．对于电荷为零的态，还列出了 C 宇称．

对于 $(K\bar{K})n\pi$ 末态，表中列出了末态的各相对轨道角动量 $l_{K\bar{K}}$, $l_{\pi\pi}$ 和 l，同时列出了 $L=l_{K\bar{K}}+l_{\pi\pi}+l$．对于其它末态，各介子之间的各相对轨道角动量分别是多少在分析中并不重要，因此并不分别列出各相对轨道角动量，只列出它们的和 L．在非相对论极限下，L 是衰变的分波位垒幂次．考虑到包含 $(K\bar{K})$ 系或 η 介子的各道阈值较高，实际分析中，重要的是非相对论极限下的分波位垒幂次，因此，表中不列出相对论极限下的分波位垒幂次 Λ．对于仅含 π 介子的各道，由于阈值较低，表中把 L 和 Λ 都列出了．

当同一末态可以通过不同角动量分波衰变达到时，表中仅列出 L 值较低的情形，因为一般说来，由于分波位垒的影响，L 值较低的衰变方式应为主要的衰变方式．当同一 $(K\bar{K})n\pi$ 末态可以通过相同 L 值但 $l_{K\bar{K}}$, $l_{\pi\pi}$ 和 l 不同组合的几种衰变分波达到时，则在表中分别列出．

8．对称性定性分析的典型例子

例一：ϕ 粒子

60 年代在强子碰撞中发现在 K^+K^- 和 $K_L^0K_S^0$ 的不变质量分布中有一个共振峰，质量为 $m=(1019.412\pm0.008)$MeV，衰变宽度为 $\Gamma=(4.41\pm0.07)$MeV，称为 φ 介子. 由于在 $K^+K_L^0$, $K^+K_S^0$, $K^-K_L^0$, $K^-K_S^0$ 不变质量分布中没有看到相应的峰，因此 φ 介子的 $I=0$. 由于 K^+K^- 是一对正反赝标介子($J^P=0^-$)，可以得到 $C'=P'=(-1)^L=(-1)^J$，这样 φ 介子的 CP 宇称为正. 但在略去 CP 破坏效应后 $K_L^0K_S^0$ 系的 CP 宇称为 $(-1)^{L+1}$，由此得到轨道角动量 L 必须为奇，从而 $C'=P'=-$，$G'=-$. 这样 φ 介子的量子数确定为 $I^G=0^-$，$J^{PC}=$奇$^{--}$.

利用实验给出的宽度，可以反过来推出各种可能的自旋值对应的等效耦合常数值，结果如下表所示：

J	1	3	5
α 从 K^+K^-	1.66	2.51×10^3	3.23×10^6
α 从 $K_L^0K_S^0$	1.78	4.78×10^3	1.09×10^7

从这个结果来看，显然只有 $J=1$ 时等效耦合常数的量级是合理的，并且同位旋守恒要求从两种衰变末态定出的等效耦合常数相同，从这要求来看也只有 $J=1$ 时才能符合要求. 后来实验直接定出 φ 介子的自旋果然是 $J=1$.

例二：ι 和 E 粒子

60 年代在强子碰撞中发现在 $(K\overline{K})^-\pi^+$ 和 $(K\overline{K})^+\pi^-$ 的不变质量分布中有一个共振峰，质量为 $m=(1425.3\pm1.3)$MeV，衰变宽度为 $\Gamma=(55.3\pm3.0)$MeV，称为 E 介子. 由于在相应带电末态的不变质量分布中没有看到相应的峰，因此 E 介子的 $I=0$. 由于 $(K\overline{K})$ 系带电，这个系统 $I=1$，$G'=(-1)^{L+1}$，其中 L 为 $(K\overline{K})$ 系内部轨道角动量. E 介子则有 $C'=G'=(-1)^L$. 考虑到 E 介子的衰

变宽度很大，可以估计它是通过低分波的强衰变．令 L' 为 π 和 $(K\bar{K})$ 系之间的轨道角动量，低分波衰变允许的量子数如下表：

(L,L')	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
J^{PC}	0^{-+}	1^{+-}	1^{+-}	0^{--}　　1^{--}　　2^{--}

如果 E 粒子的量子数为 $I=0, J^{PC}=1^{+-}$，它应还能通过分波位垒幂次为 $L=3$ 和 $\Lambda=2$ 的分波衰变到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态．考虑到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 道的阈值很低，这个道的分波位垒幂次又不很高，这个衰变道应能被观察到．但是实验在 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态里并没有发现峰，因此 $I=0$，$J^{PC}=1^{+-}$ 的可能性应予排除．后来实验上发现 E 介子还可以衰变为 $\eta\pi\pi$ 末态，由于 η 的同位旋 $I=0$，$(\pi\pi)$ 系的同位旋也应为 $I=0$，按过去的讨论，$(\pi\pi)$ 系的 C 宇称为正．考虑到 η 介子的 C 宇称亦为正，E 介子的 C 宇称亦应为正，这样 C 宇称为负的几种可能性都应予排除，需要考虑的只是 $J^{PC}=0^{-+}$ 和 1^{++} 这两种可能性．

实验上发现 E 介子后，经过 18 年一直未能从实验上确定 E 介子的 $J^{PC}=0^{-+}$ 还是 1^{++}．最后终于弄清楚了，原来在这质量附近存在两个衰变行为相近的态，一个就是 E 介子，质量和宽度如前所述，量子数为 $I=0$，$J^{PC}=1^{++}$；另一个称为 ι 粒子，质量为 $m=(1440\pm20)\text{MeV}$，衰变宽度为 $\Gamma=(60\pm30)\text{MeV}$，量子数为 $I=0, J^{PC}=0^{-+}$．由于这两个粒子的质量，宽度相近，主要衰变方式相同，常期被误认为是同一个粒子，从而造成长期难以最终判定其量子数．

第七章　味 $SU(N)$ 整体对称性

§7.1　$SU(N)$ 群及其表示

$SU(N)$ 群是 N 维复空间的幺模幺正矩阵群，有 $m=N^2-1$ 个生成元.物理研究中常将生成元通过 N 维复空间的矩阵形式写出，即通过基本表示的表示矩阵给出为

$$I_i=\frac{1}{2}\lambda_i,$$

其中 λ_i 为 Gell-Mann 矩阵。对于 $SU(3)$ 有

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

这些矩阵作为 $SU(3)$ 基本表示的生成元矩阵，满足

$$\mathrm{Tr}(L_iL_j)=T(L)\delta_{ij}.$$

事实上对基本表示 **3**，$T(L)=1/2$，这也符合我们在前面给的一般约定.

对于 $SU(4)$群，有 15 个生成元，除了将 $SU(3)$的 8 个 λ 矩阵扩充到 4 行 4 列的矩阵(第 4 行 4 列元素均为零)外，再增加 7 个为

$$\lambda_9=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_{13}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \lambda_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_{15}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}.$$

同样地可以扩充到 $SU(5)$，$SU(6)$，…，每次增加一行一列时，对应非对角元素按上面的规则给出 $N-1$ 个实 λ 矩阵，$N-1$ 个虚 λ 矩阵，最后再增加一个实对角 λ 矩阵：

$$\lambda_{N^2-1}=\sqrt{\frac{2}{N(N-1)}}\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&\ddots&&\\&&&&1&\\&&&&&-(N-1)\end{pmatrix}.$$

可以看出，采用 Gell-Mann λ 矩阵的优点在于比较直接体现出 $SU(2)\longrightarrow SU(3)\longrightarrow\cdots\longrightarrow SU(N)$ 的扩充过程，在扩充时，原来的生成元矩阵不需要作变动. 这个特点的另外一面也就是比较直接体现出 $SU(N)\supset SU(N-1)\supset\cdots\supset SU(2)$ 的子群链，并且也可以反映出对 $N>2$，总有

$$SU(N)\supset SU(N-1)\times U(1),$$

在物理研究中经常需要用到这个性质.

$SU(N)$ 群的 $m=N^2-1$ 个生成元 I_i 满足李代数关系：

$$[I_i, I_j]=iC_{ijk}I_k,$$

但是作为矩阵群，其生成元可以具体以矩阵形式给出，即通过基本表示以 λ 矩阵的形式给出. 作为矩阵，除李代数关系外，还可以有其它运算性质，常用的是生成元矩阵表示的反对易关系：

$$\{I_i, I_j\}=I_iI_j+I_jI_i=\frac{1}{N}\delta_{ij}+d_{ijk}I_k,$$

注意，这里我们仍用 I_i 表示生成元在基本表示中的表示矩阵，其中 δ_{ij} 的系数 $1/N$ 是由等式两边对 $i=j$ 时求阵迹所定出的.

生成元 I_i 满足的对易式和反对易式在意义上有很大的不同. 对易式中的结构常数 C_{ijk} 不随 N 而改变，例如在 $SU(N)$ 群中，取出 I_1, I_2, I_3，它们之间的对易式和 $SU(2)$ 群的李代数关系是一样的. 然而反对易式中的 d_{ijk} 系数则依赖于 N，例如在 $SU(N)$ 群中，取出 I_1, I_2, I_3，它们之间的反对易式和 $SU(2)$ 群的反对易式并不相同. 换言之，如果对于 $SU(N)$ 群的结构常数 C_{ijk} 已知，则可以从中直接分出 $SU(M)$，$(M<N)$ 的结构常数；但是如果对于 $SU(N)$ 群 d_{ijk} 系数已知，则从中并不能直接分出 $SU(M)$，$(M<N)$ 的 d_{ijk} 系数. 此外，对于抽象的群生成元来说，对易式作为生成元的李代数关系总是成立的，但是反对易式就没有严格的定义.

$SU(N)$ 群的不可约表示通过 $N-1$ 个参数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1})$ 来

描述，取基本表示$(1,0,0,\cdots,0)$和它的共轭表示$(0,0,0,\cdots,1)$，其它表示都可以通过它们直乘而得出来.

$SU(N)$群的任何不可约表示$(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$都可以用杨图来具体描述. 以图7.1为例来说明此问题，每列i格的列数为λ_i，此图代表$\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=4,\lambda_4=4$. 如果这个杨图代表一个$SU(6)$群的表示，则这表示为$(3,1,4,4,0)$；如果代表一个$SU(5)$群的表示，则这表示为$(3,1,4,4)$；如果代表一个$SU(4)$群的表示，则这个表示为$(3,1,4)$. 由于这个杨图有4行，这表明它不可能代表$SU(3)$群或$SU(2)$群的表示.

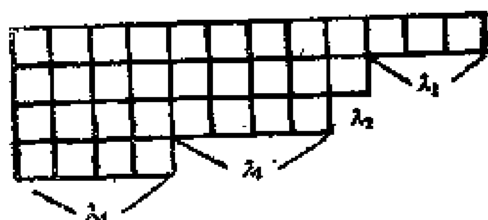


图7.1 $SU(N)$表示的杨图

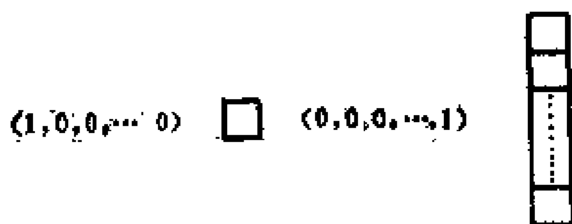


图7.2 基本表示的杨图

按照上面的规则，基本表示$(1,0,0,\cdots,0)$和$(0,0,0,\cdots,1)$分别对应的杨图如图7.2所示. 杨图的数学含意是：对于每一个$SU(N)$群，一个格子用一个指标来标志，其取值可以从1到N共N个取值，因此$(1,0,0,\cdots,0)$为N维表示；如果有多个格子排在一列，则这些格子中的指标必须反对称化，即它们不能取相同值，因此虽然$(0,0,0,\cdots,1)$的杨图有$N-1$个格子，但表示的维数仍是N；如果有多个格子排在一行，则这些格子中的指标必须完全对称化；如果既有格子同行又有格子同列，则在保证按列反对称化的前提下，再把每一行都按照对称的要求进行行的对称化.

按照这些含意，对于$SU(N)$群，如果一个只由N个格子排成一列的杨图，根据反对称要求，指标$1,\cdots,N$都被填入一个方格，这说明指标的选取已无任意性，对应于1维表示. 因此一般说来

对 $SU(N)$ 群的表示，如杨图中有 N 个格子排成一列，则其对表示维数无贡献．按照这些含意还可以看出，对于 $SU(N)$ 群，不允许杨图中一列有多于 N 个格子出现．

利用这些性质，还很容易在杨图上体现出表示的互相共轭关系．对于表示 $D(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$ 来说，它的共轭表示是 $D(\lambda_{N-1},\cdots,\lambda_1)$，反映在杨图上，则应是这两个表示的杨图可以合成一个 N 行的矩形．例如 $SU(4)$ 群的 $D(2,1,1)$ 和 $D(1,1,2)$ 互为共轭表示，它们的杨图分别如图 7.3(a)，(b)所示．它们互为共轭的关系体现在两个杨图可拼成一个 4 行的矩形，如图 7.3(c)所示．

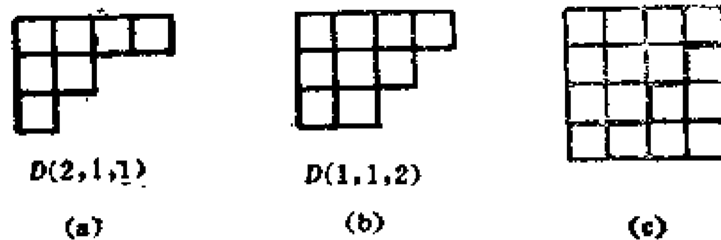


图 7.3　互为共轭表示的杨图

当然，从上面的介绍还可以看出，给定表示后对应的杨图并不唯一，因为在杨图左边添上 N 行的矩形图代表的仍是同一表示．

$SU(N)$ 群的表示用 $D(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$ 来标志，其表示的维数可如下求得：

$SU(2)$ 群表示用参量 λ 描写，λ 的物理意义是同位旋的 2 倍，维数为

$$N_2=(1+\lambda);$$

$SU(3)$ 群表示 $D(\lambda,\ \mu)$ 用两个参数 λ、μ 来描述($\lambda=\lambda_1,\ \mu=\lambda_2$)，其维数为

$$N_3=\frac{1}{2!}(1+\lambda)(1+\mu)(2+\lambda+\mu);$$

$SU(4)$ 群的表示 $D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的维数为

$$N_4=\frac{1}{3!2!}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(2+\lambda_1+\lambda_2)$$
$$(2+\lambda_2+\lambda_3)(3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3);$$

$SU(5)$群的表示 $D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$的维数为

$$N_5=\frac{1}{4!3!2!}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(1+\lambda_4)(2+\lambda_1+\lambda_2)$$
$$(2+\lambda_2+\lambda_3)(2+\lambda_3+\lambda_4)(3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$
$$(3+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)(4+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4).$$

如此类推下去，一般说来 $SU(N)$群的表示 $D(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$的维数为

$$N_N=\frac{1}{(N-1)!(N-2)!\cdots2!}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots\cdots(1+\lambda_{N-1})$$
$$(2+\lambda_1+\lambda_2)(2+\lambda_2+\lambda_3)\cdots\cdots(2+\lambda_{N-2}+\lambda_{N-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(N-1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_{N-1}).$$

§7.2 $SU(3)$群的表示

1. $SU(3)$群表示及其分类

$SU(3)$群的表示D由两个参量 λ 和 μ 描写。如果用杨图来描

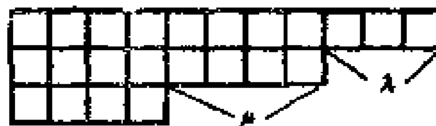


图 7.4 $D(\lambda,\mu)$表示的杨图

述则如图 7.4 所示，如果表成张量形式则为

$$\phi\begin{bmatrix}l,m,\cdots,n\\ i,j,\cdots,k\end{bmatrix},$$

其中下指标共 λ 个，上指标共 μ 个，并且对上指标和下指标都要分别对称化，同时任一个上指标和任一个下指标的阵迹都必须为

零.

$SU(3)$群的秩为2，它有两个独立的 Casimir 算符 C_2 和 C_3. 对于每一个不可约表示 $D(\lambda, \mu)$，Casimir 算符 C_2 和 C_3 的本征值为

$$C_2=\frac{1}{3}(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2)+\lambda+\mu$$

$$=\frac{1}{3}(\lambda-\mu)^2+\lambda+\mu+\lambda\mu$$

$$C_3=(\lambda+2\mu)(\mu+2)-\frac{1}{9}(\lambda-\mu)(2\lambda^2+5\lambda\mu+2\mu^2)$$

如果知道了 C_2 和 C_3，利用上式，再加上 λ 和 μ 必须是非负整数的条件，也能完全确定 λ 和 μ. 因此对 $SU(3)$群的不可约表示，既可以用(λ, μ)来标记，也可以用(C_2, C_3)来标记，这两种标记法是等价的. 当然人们为讨论方便则往往用(λ, μ)来标记.

对于不可约表示 $D(\lambda, \mu)$，C_2 的本征值对 λ 和 μ 是对称的，但 C_3 的本征值则对 λ 和 μ 既不是对称的也不是反对称的. 可以引入 C_3 和 C_2 的线性组合:

$$C_3'=C_3-3C_2,$$

它的本征值对 λ 和 μ 是完全反对称的:

$$C_3'=(\lambda-\mu)\left[\frac{(\lambda-\mu)^2}{9}-C_2-1\right].$$

一些常用的不可约表示的维数和 Casimir 本征值见表 7.1.

$SU(3)$群的表示，可以按照所对应的杨图方格数以 3 为模等于 0，+1，−1 而分成三类. 这个分类如果通过 λ 和 μ 给出则是按

$$\lambda+2\mu=(\lambda-\mu)\ (\mathrm{mod}\quad 3)$$

来分类. 这个分类反映在 Casimir 算符本征值上则为

0 类的表示 C_2, C_3 都是整数;

±1 类的表示 C_2, C_3 都是分数；

互为共轭的两个表示 C_2 相同，但 C_3 不同。

表 7.1 常用的不可约表示的维数和 Casimir 本征值

表示		C_2	C_3	C'_3
$D(0,0)$	1	0	0	0
$D(1,1)$	8	3	9	0
$D(2,2)$	27	8	24	0
$D(1,0)$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$-\frac{20}{9}$
$D(0,1)$	3^*	$\frac{4}{3}$	$\frac{56}{9}$	$\frac{20}{9}$
$D(2,0)$	6	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{9}$	$-\frac{70}{9}$
$D(0,2)$	6^*	$\frac{10}{3}$	$-\frac{160}{9}$	$\frac{70}{9}$
$D(3,0)$	10	6	0	-18
$D(0,3)$	10^*	6	36	18
$D(2,1)$	15	$\frac{16}{3}$	$\frac{88}{9}$	$-\frac{64}{9}$
$D(1,2)$	15^*	$\frac{16}{3}$	$\frac{200}{2}$	$\frac{64}{9}$

共轭表示与分类的关系为

(1) 如果表示 D 的分类为 0，$+1$，-1，则 D 的共轭表示 D^* 的分类分别对应为 0，-1，$+1$；

(2) 如果表示 D 是自共轭的，即 $D=D^*$，则 D 的分类必为 0 类，但并不是说 0 类的表示都是自共轭的。

分类的最重要应用是在表示直乘分解时，严格按照分类的求和来进行的，例如将两个不可约表示 $D(\lambda_1,\mu_1)$ 和 $D(\lambda_2,\mu_2)$ 直乘分解成不可约表示的直和时，如果 $D(\lambda_1,\mu_1)$ 为 0 类，$D(\lambda_2,\mu_2)$ 为

1 类，则直乘后分解得的各表示都是 0+1+1 类．一般说来：

$D(\lambda_1,\mu_1)$ 是 $(\lambda_1-\mu_1)$ (mod 3) 类；

$D(\lambda_2,\mu_2)$ 是 $(\lambda_2-\mu_2)$ (mod 3) 类；

$D(\lambda_1,\mu_1)\times D(\lambda_2,\ \mu_2)$ 可分解成 $[(\lambda_1-\mu_1)+(\lambda_2-\mu_2)]$ (mod 3) 类的不可约表示的直和．

由于 $SU(3)$ 群变换下的不变性总是通过表示乘积的分解的不变性体现出来，上述分类性质在表示直乘分解时的不变性显示出人们可以引入某一个守恒量子数来描述分类的这个对称性．显然这个量子数应具有分立量子数的特征，其可取值共有 3 个，根据上面的分析可以选作

$$e^{i\frac{2}{3}\pi(\lambda-\mu)}$$

这个量子数的守恒性和其它分立对称性一样，以乘积不变的形式表现出来．有时为了简单，就取分类数 $(\lambda-\mu)$ (mod 3) 为量子数，则守恒性仍以相加的形式（但不能忘记 mod 3）表现出来，以后可以看到不同的类在物理意义上的差别．

2．表示的权图

给定表示 $D(\lambda,\mu)$ 后，表示的维数为

$$N_3=\frac{1}{2}(1+\lambda)(1+\mu)(2+\lambda+\mu),$$

即表示是在 N_3 维空间中，有 N_3 个基矢，需要对这些基矢的性质和分布给以描述．

$SU(3)$ 群中互相对易的生成元有两个：

$$I_3=\frac{1}{2}\lambda_3$$

和

$$I_8=\frac{1}{2}\lambda_8.$$

由于历史的原因，称 I_3 为同位旋第 3 分量，I_8 乘上 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 后，称为超

荷 Y. 对于基本表示

$$I_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$Y=\frac{2}{\sqrt{3}}I_8=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

既然 I_3 和 Y 是同时可测的两个量，$n(=N_3)$ 维表示的每一个态都可以通过 I_3 和 Y 标志出来，取 I_3 和 Y 分别为横坐标和纵坐标，这样标志各态的分布称为权图.

由于 I_3 和 Y 的阵迹都是零，因此同一表示中各态的 I_3 和 Y 的和分别都为零. 换言之，每一表示中各态的"重心"为原点.

$D(1,0)$ 表示为 3 维表示，即 $SU(3)$ 群的基本表示. 三个态的 (I_3,Y) 分别为 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$ 和 $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$，权图如图 7.5(a) 所示. $D(1,0)$ 的共轭表示 $D(0,1)$，它的权图为 $D(1,0)$ 的各点作变换 $I_3\to -I_3, Y\to -Y$ 所得，如图7.5(b)所示. 显然这两个表示权图的重心都在原点.

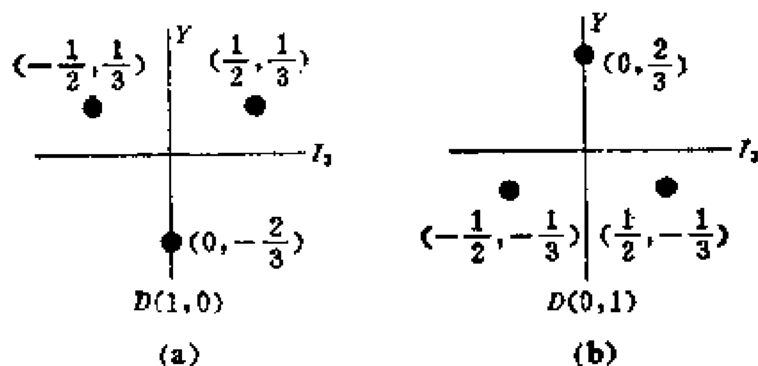


图 7.5 基本表示 $D(1,0)$ 和 $D(0,1)$ 的权图

一般说来，对于表示 $D(\lambda,\mu)$，作权图的规则如下：

(1) 画一个六边形，上边长 λ 格，下边长 μ 格，各斜边都按 $\left|\frac{\Delta Y}{\Delta I_3}\right|=2$ 的斜率来作. 当然如果 $\lambda=0$ 或 $\mu=0$，则六边形退化成一个正立的或倒立的三角形.

(2) 这个六边形应是左右对称的，实际上三个不相邻边长为 λ 格，另三个不相邻的边长为 μ 格.

(3) 在每两个对边之间打平行线格子，形成以三角形为基本单元的网络，网络上每一交点是一个态或简并态.

(4) I_3—Y 坐标架的安放，即原点的安放应保证与六边形的重心重合. 如果表示为 0 类，则原点应在某一格点上；如果表示为 +1 类，则原点应在某一基本单元倒三角形的中心；如果表示为 −1 类，则原点应在某一基本单元正三角形的中心.

(5) 态的简并重数规则如下：对六边形从外向内数，第一层的态是单重态，第二层的态是二重简并态，第三层的态是三重简并态，…，其余类推，但是到某一层时为三角形，则这层以内的态的简并度就停止增加。

根据上面五条规则，任给一个表示 $D(\lambda,\mu)$，立即可以画出其权图. 图 7.6 给出的是 $D(4,1)$ 的权图，因为表示属 0 类，原点落

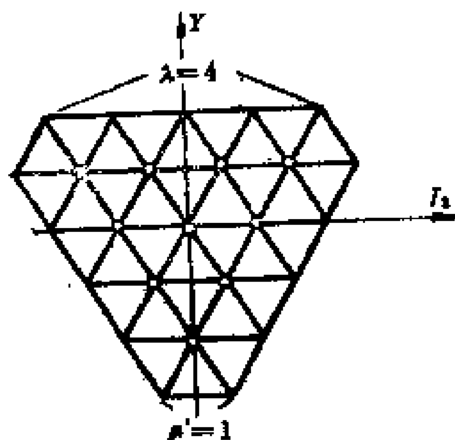


图 7.6 $D(4,1)$ 表示的权图

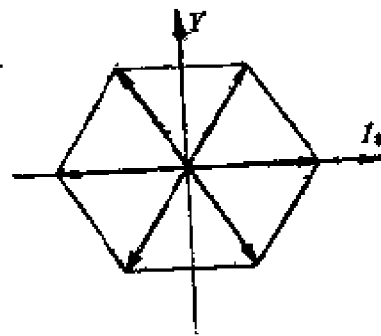


图 7.7 $SU(3)$ 的根图

于一个格点上，最外层格点是一重态，第二层是二重简并态，因为

第三层已是三角形，第二层里面的态也是二重简并态．这样从权图上看 $D(4,1)$ 表示中有 35 个态，即它是 35 维表示，这和利用维数公式得出的是一致的．

现在简单说明一下根图和权图的关系．$SU(3)$ 的根图如图 7.7 所示，它是一个六角形，6 个顶点代表 6 个根，另有 2 个零根在原点，这个根图形式上和表示 $D(1,1)$ 的权图是完全一样的．

权图代表的是表示中态的分布，根图则与表示无关，它代表生成元的作用．如果把根图原点放至权图某一个态处，则根图上各点代表相应的生成元对该态作用的结果。如果沿根图某根方向移动到这表示之处，则这个生成元对这个态的作用得零．因此按上述规则，从一个不可约表示中任一态出发，反复用各生成元去作用，总可得到该表示中全部态，但不会得到不属于这表示的态．

3．表示的 $SU(2)\times U(1)$ 图描写

$SU(3)$ 群的最常用的子群分解为 $SU(2)\times U(1)$，$SU(3)$ 的任一表示 $D(\lambda,\mu)$ 中所包含的态可以按它们在 $SU(2)\times U(1)$ 群中的变换性质来标志．$SU(2)$ 群表示由同位旋 I 标志，$U(1)$ 群表示由超荷量子数 Y 来标志，因此 $SU(3)$ 的不可约表示中所含的态可以由 (I,Y) 来标志，并在 $Y—I$ 图上表示出来，在 $Y—I$ 图上，通常可将 Y 轴改变 1 和 I 轴改变 $\frac{1}{2}$ 的间隔取成相同的．

每个 $SU(3)$ 的不可约表示中只含一个 $I=0$ 的态，这个态的 Y 量子数记作 Y_0，它由

$$Y_0=-\frac{2}{3}(\lambda-\mu)$$

来给出．这样给定表示 $D(\lambda,\mu)$ 后，立即可根据上式定出 Y_0 来，于是就可以在 $Y—I$ 图上将这个 $I=0$ 的态标出．

标出 $I=0$ 的态后，从这点出发沿 45° 线和 135° 线分别引出线段，前者为 λ 格，后者为 μ 格．以这两线段为边作出的矩形，每

一个格点就代表这个表示中的态．在 $Y—I$ 图上表出时与权图不同的是：在权图上有的点是多重态，而在 $Y—I$ 图上则没有多重态．如图 7.8 给出的是 $D(4,1)$ 表示，从这图可以明显看出，它比权图简单明确．

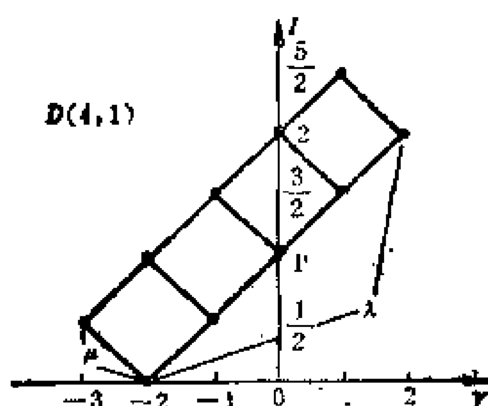


图 7.8　$D(4,1)$ 表示的 $Y—I$ 图

在 $Y—I$ 图上，也可明显地看出表示的分类．凡是 0 类的 Y_0 都是整数；凡是 +1 类的 Y_0 都是整数加 1/3；凡是 −1 类的 Y_0 都是整数减 1/3．

从上述规则还可以看出，表示 $D(\lambda,\mu)$ 中的最大同位旋值为 $I_{max}=\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$，这样的同位旋态也只有一个，它所具有的超荷为 $Y_{max}=\frac{1}{3}(\lambda-\mu)$．

从上述规则还可以看出，对表示 $D(\lambda,\mu)$ 来说，其中所含各态的 Y 值共可取 $\lambda+\mu+1$ 个不同的值，最小的 Y 值为 $Y=-\frac{1}{3}(2\lambda+\mu)$，最大的 Y 值为 $Y=\frac{1}{3}(\lambda+2\mu)$，它们分别只有一个态，对应的 I 值分别为 $I=\frac{1}{2}\mu$ 和 $I=\frac{1}{2}\lambda$．

综上所述，如果给定表示 $D(\lambda,\mu)$，则它在 (Y,I) 图上的态亦

可如下求出：在 $Y-I$ 图上给出四点，即

$$\left(-\frac{2}{3}(\lambda-\mu),0\right),\ \left(\frac{1}{3}(\lambda-\mu),\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\right),$$
$$\left(-\frac{1}{3}(2\lambda+\mu),\frac{1}{2}\mu\right),\ \left(\frac{1}{3}(\lambda+2\mu),\frac{1}{2}\lambda\right),$$

以这四点为顶点联成矩形，矩形格点都代表 $D(\lambda,\mu)$ 所含的态，并且所有的态都没有简并.

4. 表示直乘分解的杨图法

现在要讨论的是两个不可约表示 $D(\lambda_1,\mu_1)$ 和 $D(\lambda_2,\mu_2)$ 直乘后，如何展开成不可约表示的直和. 可以有几种不同方法来作这个问题，都可以很快地得到结果，并且几种方法各有特点，在此介绍最常用并且简便的三种方法.

首先介绍杨图法. 先从杨图开始讨论. 杨图是在研究置换群、对称群等有限群时引进来的，以置换群为例说明之.

设有 n 个对象，可以任意交换这些对象的位置，每一个这种交换作为一种操作，称为一个置换，作为群元素. n 个对象之间所有可能的置换整体构成一个群，称为 n 维置换群，记作 S_n. 在这个群里，两个置换的乘积定义为两个置换接续进行.

对于 n 个对象的全部或一部分位置的轮换可以用括号括起来表示，把一个置换通过轮换括号表示出来叫分拆. 例如，$n=6$ 情形，6 个对象可以用 1, 2, 3, 4, 5, 6 来标记，可以作分拆：(123)(45)6, (436)(52)1, (12)(3456), …，形状相同的分拆属于同一共轭元素类，例如，上面举出的第一个和第二个分拆形状相同，属于同一共轭元素类.

共轭元素类的数目等于群的不等价不可约表示的数目，因此，分拆有几种形状就决定了有几个共轭元素类，也就决定了 S_n 群有几个不等价不可约表示，因而有必要对分拆做进一步的描写，这就

引进了杨图的概念。

可以用

$$(\nu)=(n^{\nu_n}(n-1)^{\nu_{n-1}}\cdots2^{\nu_2}1^{\nu_1})$$

来描写 S_n 群的轮换结构，代表轮换结构中有独立的 ν_k 个 k 阶轮换($k=1,2,\cdots,n$)，其中 ν_k 为自然数，并且满足

$$n\nu_n+(n-1)\nu_{n-1}+\cdots+2\nu_2+\nu_1=n.$$

如果对于某一 k 值，$\nu_k=0$，则在(ν)的表述中可以略去 k^{ν_k}. 例如上面举的例中，S_6的几个轮换结构分别为(321)，(321)，(42)，⋯.

(ν)也代表 S_n 群的一个类，这个类中包括的元素个数为

$$\frac{n!}{n^{\nu_n}\nu_n!(n-1)^{\nu_{n-1}}\nu_{n-1}!\cdots2^{\nu_2}\nu_2!1^{\nu_1}\nu_1!}.$$

S_n 群的类，也常用$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$来描述，其中

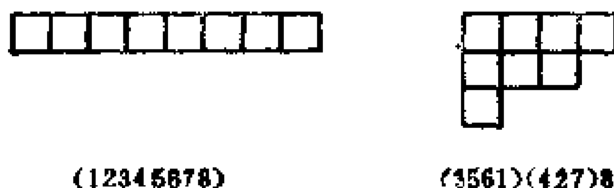
$$\lambda_k=\sum_{i=k}^{n}\nu_i$$

显然各 λ_k 满足

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=n.$$

$[\lambda]$称为 n 的一个分拆，n 个对象用 n 个方格子来表示. 给定一种分拆$[\lambda]$，把 n 个格子按$[\lambda]$进行排列：第一行有 n_1 个方格子，第 2 行有 n_2 个方格子，依此类推，各行的左边对齐，每一行代表一个轮换，这就是分拆的杨图描写. 例如 S_8 中两个分拆的杨图如图 7.9



(12345678)　　　(3561)(427)8

图 7.9　S_8 中两个分拆的杨图

所示．由于共轭元素类中不同元素类有相同形状的分拆，同一类中不同元素在杨图中并不区分而用同一图来表示．

在研究李群时，亦常常利用杨图．用杨图来描写 $SU(N)$ 群时，每一个格子对应一个基本表示 $D(1,0,0,\cdots,0)$，或者说对应于一个 $D(1,0,0,\cdots,0)$ 表示的角标．当一个表示比较复杂时，它相当于几个基本表示的合效果，则其杨图中相应也有几个方格以代表这些基本表示的合效果．当然方格的排列还要遵循行和列的对称和反对称的要求，这样每一个杨图对应一个不可约表示．

杨图最大的用处是作表示直乘分解，在一些给定的规则下，可以很快地写出来．先看一个具体的例子，然后再给出一般规则．

考虑 $D(3,1)\times D(1,1)$ 的分解，其杨图如图 7.10 所示，将后一个图中各格子编上行号，前一个杨图不动，然后将后一个图中各格子按下述规则往前一个图上添，再将所有可能的结果加起来．



图 7.10　$D(3,1)\times D(1,1)$ 的杨图

添加的规则是

(1) 添在同一行的格子行号相同或以从左到右的顺序来说从小到大；

(2) 添在同一列的格子不能行号相同，能逐增；

(3) 从右上到左下来数添加的格子，任何时候行号为 1 的格子不少于行号为 2 的格子．

按照这些规则，上例可表为图 7.11 所示的分解，即

$$D(3,1)\times D(1,1)=D(4,2)+D(2,3)+D(5,0)$$
$$+D(3,1)+D(3,1)+D(2,0).$$

图 7.11 $D(3,1)\times D(1,1)$的分解的杨图

再看一例：$D(1,1)\times D(1,1)$的分解，其杨图如图 7.12 所示，

图 7.12 $D(1,1)\times D(1,1)$的分解的杨图

即

$$D(1,1)\times D(1,1)=D(0,0)+D(1,1)+D(1,1)$$
$$+D(3,0)+D(0,3)+D(2,2),$$

即通常熟知的

$$8\times 8=1+8+8+10+10^*+27.$$

值得注意的是，两个表示直乘时次序是可交换的，用杨图作分解时，通常取格子数少的放在后面，以便分解时较简单.

现在再看一个倒过来的问题：如果给出一个表示 $D(\lambda,\mu)$，问它能否由另一已知表示 $D(\lambda_1,\mu_1)$与其它某个表示直乘出来？如果能，找出这个表示的所有可能的解，用符号表示，记作

$$D(\lambda,\mu)/D(\lambda_1,\mu_1).$$

下面通过一个例子来讨论，考虑

$$D(2,2)/D(1,1)$$

的所有可能解，由于 $D(2,2)$ 和 $D(1,1)$ 的杨图分别为图 7.13(a)(b)所示．因此自然想到将 $D(2,2)$ 的杨图中，把 $D(1,1)$ 的部分去

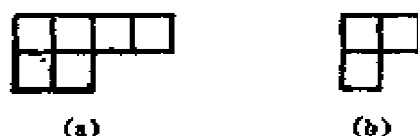


图 7.13　$D(2,2)$ 和 $D(1,1)$ 的杨图

掉，看余下的格子可以组成哪些表示．按这想法去作得到的杨图如图 7.14(a) 所示．这样 3 个余下的格子标法共有 2 种，如图 7.14(b)和(c)所示．亦即结果为

$$D(2,2)/D(1,1)=D(1,1)+D(3,0).$$

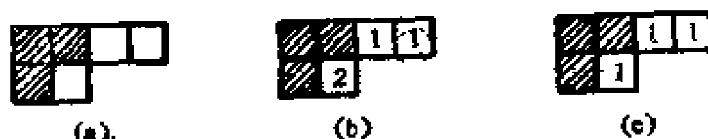


图 7.14　$D(2,2)$ 分解杨图

但是这结果显然是不正确的，因为左边对 $\lambda\leftrightarrow\mu$ 是对称的，然而右边并不对称．产生这个错误的原因在于 $D(2,2)$ 同时还可表为图 7.15 的各种形式．因此上面的作法是不完全的．完全的作法是

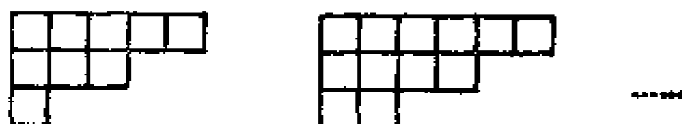


图 7.15　$D(2,2)$ 杨图不定性

对这些图都作同样处理，结果如图 7.16 所示．这样得到

$$D(2,2)/D(1,1)=D(1,1)+D(3,0)+D(0,3)+D(2,2)+D(2,2)+D(4,1)+D(1,4)+D(3,3)$$

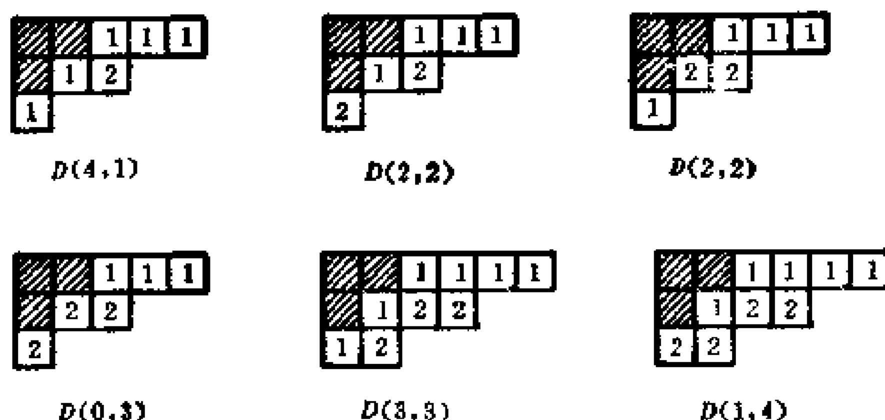


图 7.16 $D(2,2)/D(1,1)$分解杨图

这才是完全的解.

由此可见，这个反问题解的规则实际上和直乘分解的规则是完全一样的，但在作时要注意以下几点:

(1) $D(\lambda,\mu)$的杨图除 2 行图外，还必须考虑 3 行图. 3 行图中最大列数考虑到等于 $\lambda_1+\mu_1$ 就足够了. 可以证明更多列数的 3 行图的结果都已经完全包括在前面已得的结果中;

(2) $D(\lambda_1,\mu_1)$的杨图可以只考虑 2 行图，因 3 行图的所有结果都已经完全包括在 2 行图的结果中了.

(3) 求解时在各空格中添上行号时，只添 1 和 2，行号 3 不必添，因已经完全包括了添行号 3 的结果.

(4) 按照这样规则给出的结果是完全的，并且没有重计算. 在上例中 $D(2,2)/D(1,1)$中出现两个 $D(2,2)$，这并不是反映重复计算，而是反映 $D(2,\ 2)\times D(1,\ 1)$中可以分解出两个独立的 $D(2,\ 2)$来.

5. 表示直乘分解的权图法

表示直乘的权图法是对 $l=2$ 的群特有的方法，在 $SU(3)$群中用得很多.

考虑 $D(\lambda_1,\mu_1)\times D(\lambda_2,\mu_2)$作直乘分解的规则如下:

(1) 作出 $D(\lambda_1, \mu_1)$ 的权图，显然权图中每一点代表 $D(\lambda_1, \mu_1)$ 表示中的态；

(2) 以 $D(\lambda_1, \mu_1)$ 的权图上各点为中心分别作 $D(\lambda_2, \mu_2)$ 的权图，这样得到的全部点即 $D(\lambda_1, \mu_1)\times D(\lambda_2, \mu_2)$ 的全部态的权.

(3) 在上面这两步，无论 $D(\lambda_1, \mu_1)$ 还是 $D(\lambda_2, \mu_2)$ 的多重权都重复计算. 因此，若 $D(\lambda_1, \mu_1)$ 和 $D(\lambda_2, \mu_2)$ 的表示维数为 n_1 和 n_2，则直乘后得到的态共有 $n_1 n_2$ 个，当然其中有些权是多重简并的.

(4) 这样得到的权图是对原点作 120° 转动对称的，找与原点距离最远的权，确定它所属的表示，将这表示中所有的权由这权图中扣除；

(5) 重复这个过程，直到所有的权都扣除完为止. 这样 $D(\lambda_1, \mu_1)\times D(\lambda_2, \mu_2)$ 就等于这些逐个扣除的表示的直和.

例：求 $D(1,0)\times D(0,1)$ 的分解. 按上面规则给出如图 7.17 所示，其中原点处是三重简并态. 从权图上看，首先分出一个 8 维表示 $D(1,1)$，剩下一个 1 维表示 $D(0,0)$，即

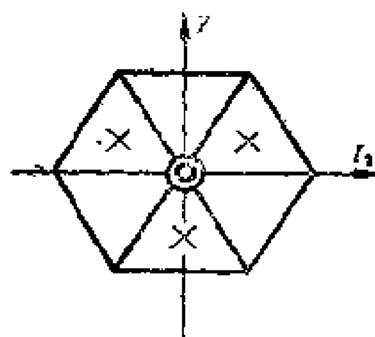


图 7.17 $D(1,0)\times D(0,1)$ 的分解

$$D(1,0)\times D(0,1)=D(1,1)+D(0,0).$$

这个例子很简单，如果作一个 $D(1,1)\times D(1,1)$，则乘积权图就相当繁了，如果作更大表示的直乘更繁了. 因此这个方法虽然有标准程序，但并不简便，实际完全可以用更简便的方法来代替.

6. 表示直乘分解的“士马法”

对于 $SU(3)$ 群表示直乘分解的一种特有的简单方法，是利用 $SU(3)$ 群表示的 $SU(2)\times U(1)$ 子群表示的描述.

由于每一个 $SU(3)$ 的不可约表示都有且仅有一个 $I=0$ 的态，

因此可以利用 $Y—I$ 图来确定两个不可约表示直乘分解成几个不可约表示的直和. 例如考虑 $D(4,1)\times D(1,1)$, 作出这两个表示的 $Y—I$ 图. 如果要乘出 $I=0$ 的态,必须是两个表示中 I 相同的态相乘,从图上看,一共有下述几种可能:

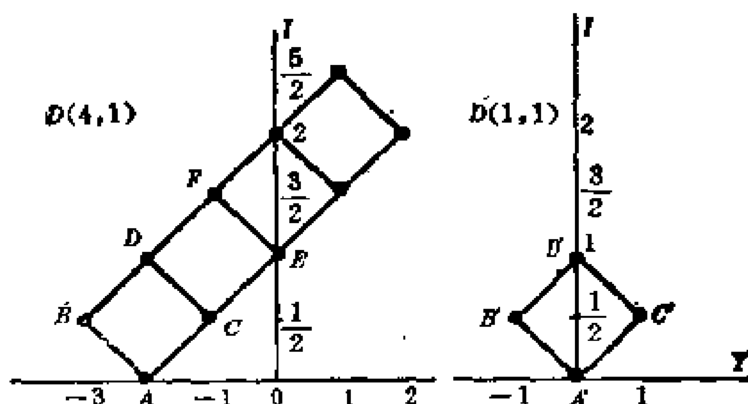


图 7.18 表示直乘分解的 $Y—I$ 图

$$AA',BB',BC',CB',CC',DD',ED',$$

由此可以判断 $D(4,1)\times D(1,1)$将分解为7个不可约表示的直和.

为了找出这7个不可约表示,可以在 $\lambda—\mu$ 图上利用"士马规则"来确定. 显然在 $\lambda—\mu$ 图上的整数格点代表 $SU(3)$ 的不可约表示.

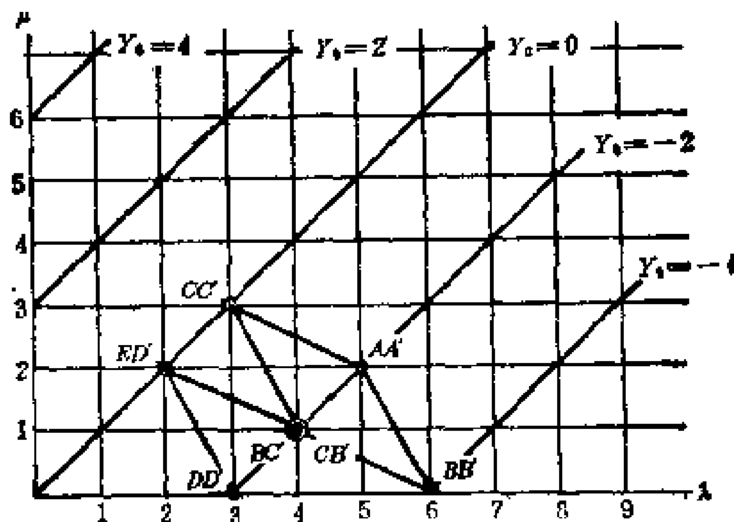


图 7.19 表示直乘分解的 $\lambda—\mu$ 图

首先找出分解出的"最高"表示，它是 $D(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2)$. 在上例中即 $D(5,2)$，它对应于 AA'. 再看 BB' 表示，它的 Y_0应比 AA' 减少 2，但 AA' 的$Y_0=-2$，故 BB' 的$Y_0=-4$，即落于$Y_0=-4$ 虚线上，移动的规则是按象棋中跳马的规则走一步过去，并且保证 $\lambda+\mu$ 减小，这样 BB' 为 $D(6,0)$. 再看 BC' 表示，它的 Y_0 应和 AA' 的相同，即仍在 $Y_0=-2$ 虚线上，因此它的移动规则是按象棋中走士的规则沿虚线按 λ 和 μ 减少的方向走一步，即 BC' 为 $D(4,1)$. 同样地，可定出 CB'也是 $D(4,1)$；CC' 是 $D(3,3)$. 再讨论 DD' 和 ED' 时，由于它们是两个 $I=1$ 的耦合(比 AA' 高两层)，因此它们的位置应按上述规则走两步，结果得到 DD' 为 $Y_0=-2$ 的 $D(3,0)$，ED' 为 $Y_0=0$ 的 $D(2,2)$，这样最后得到

$$D(4,1)\times D(1,1)=D(5,2)+D(4,1)+D(4,1)+D(3,0)+D(6,0)+D(3,3)+D(2,2).$$

利用这个方法包括两部分内容：

(1) 利用 $Y—I$ 图确定直乘分解为几个不可约表示的直和；

(2) 对照 $\lambda—\mu$ 图，利用"士马规则"找出这几个不可约表示.

上面介绍了几种表示直乘分解的方法，比较它们各有特点：

杨图法的优点是和表示的张量描写联系比较密切，方法也比较简便，并可推广于高秩群(即可推广用于 $SU(N)$群). 杨图法的缺点是要注意避免遗漏.

权图法和士马法的共同缺点是直接只适用于 $SU(3)$群，对于 $SU(N)$，$N>3$ 的情形不能简单地推广.

权图法的优点是方法的程序比较明确，不会发生遗漏，缺点是使用起来比其它方法要繁，计算量太大.

士马法的优点也是方法的程序明确，由于可以确定直乘分解所得不可约表示的个数并有一定规程一一找出来，不会发生遗漏，另一方面使用相当简便. 对于许多大维数表示的直乘分解问题，

用士马法往往比用杨图法还要快. 士马法的另一优点是与 $SU(3)$ 群表示通过 $SU(2)\times U(1)$ 子群表示的描述方法联系比较密切.

总起来说,从统一解决 $SU(N)$ 群表示直乘分解来看, 杨图法是最好的,然而从 $SU(3)$ 群表示直乘分解的实际计算来说,士马法可能是最简便且不会有遗漏的方法.

§7.3 $SU(3)$ 群表示的张量描写

1. $SU(3)$ 群表示张量

$SU(3)$ 群表示的张量描写在研究一些性质时非常有用,而 $SU(3)$ 群表示的张量描写尤其简单.

考虑一个场 ϕ_i, $i=1,2,3$, 有 3 个分量, 代表一个基本表示 $D(1,0)$. 一个大的表示,也可以通过加多指标写成张量形式. 例如可以用 ϕ_{ij}^{kl} 来描写一个表示, 这里 i, j, k, l 都可取 1,2,3,因此 ϕ_{ij}^{kl} 有 81 个分量. 然而 $SU(3)$ 群的不可约表示中,没有 81 维的, 因此 ϕ_{ij}^{kl} 是可约表示. 现在需要回答的是: 怎样用张量形式来描写不可约表示.

考虑有两个下指标的表示 ϕ_{ij}, 它共有 9 个分量, 不是 $SU(3)$ 的不可约表示. 将它分解为不可约表示的直和可以这样进行: 首先,将 ϕ_{ij} 分成对称的 $\phi_{(ij)}$ 和反对称的 $\phi_{[ij]}$ 两部分,即

$$\phi_{ij}=\phi_{(ij)}+\phi_{[ij]},$$

对称部分有 6 个分量,反对称部分有 3 个分量,它们都是 $SU(3)$ 群的不可约表示. 但是,原来的 3 维不可约表示只有一个下指标,而 $\phi_{[ij]}$ 却有两个下指标. 事实上, $\phi_{[ij]}$ 的变换性质与原来的 3 维不可约表示 ϕ_i 的共轭表示相同,因此可以用 3 阶完全反对称单位张量 ε^{ijk} 和 $\phi_{[ij]}$ 相乘得 $\varepsilon^{ijk}\phi_{[ij]}$, 这样就只有一个上指标 k 了. 在变换时,它与 ϕ_k 的共轭表示同样地变换. 换言之, 当 ϕ_{ij} 这样分解时,得到的是两个不可约表示:

$$\phi_{(ij)}\ D(2,0),\ \phi_{[ij]}\ D(0,1).$$

在 $SU(3)$群中，存在两个不变的常数张量：单位对称张量 δ_i^j 和 3 阶完全反对称单位张量 ε^{ijk}，ε_{ijk}. 可以用 3 阶完全反对称单位张量乘到反对称张量上，使两个反对称上指标降下来变为一个下指标，或使两个反对称下指标升上去变为一个上指标. 这样就使反对称的指标都可消除.

经过这样处理后，不论上指标还是下指标，最后都只剩下对称的部分. 但是这时还不能保证表示是不可约的. 要得到不可约表示，还要加上阵迹为零的条件：任取一个上指标和一个下指标，其阵迹都为零. 如果算出阵迹不为零，则从原张量中减去这阵迹乘 $\frac{1}{3}\delta_i^j$，这样给出的新张量的阵迹就一定为零了.

经过这样作之后，得到的上指标和下指标分别都是完全对称的，并且上、下指标间的所有阵迹都为零的张量是 $SU(3)$群的不可约表示.

现在看一个例子，如果有 $\phi_{[ij]}^{k}$，按照上面的分析，它的变换性质相当于有两个上标的张量，即 $\varepsilon^{ijk}\phi_{[ij]}^{l}$，这样它有 9 个分量，是可约表示. 如果它还满足阵迹为零条件 $\phi_{[ij]}^{i}=0$，这个条件实际是 3 个等式，限制掉 3 个分量，这样 $\phi_{[ij]}^{k}$ 中独立的分量实际上只有 6 个，即相当有两个对称上指标的 6 维不可约表示，亦即相当于 $\varepsilon^{ijl}\varphi_{[ij]}^{k}+\varepsilon^{ijk}\phi_{[ij]}^{l}$ 的表示.

这个例子中，反映的规则是普遍的：如果两个反对称指标之一和对偶指标之一的阵迹为零，则用完全反对称单位张量将反对称指标换成对偶指标后，则自动与阵迹为零的那个指标对称化.

现在一般来说，对于表示 $D(\lambda,\mu)$，如何给出它的张量描写. 首先写下一个张量，有 λ 个完全对称的下指标和 μ 个完全对称的上指标，求上指标和下指标的一切可能的阵迹，按上面的规则[illegible]除阵

迹，则所得的表示即 $D(\lambda,\mu)$.

如果给出了 $D(\lambda,\mu)$ 表示的张量描述，则它的共轭表示 $D(\mu,\lambda)$ 的张量描述为 $D(\lambda,\mu)$ 的张量全部上指标与下指标对换.

2. 张量表示按 $SU(2)\times U(1)$ 分解

可以用表示的张量描述来讨论表示按 $SU(2)\times U(1)$ 群表示的分解. 为具体起见，讨论表示 $D(2,2)$ 的情形，其张量描述为

$$\phi^{\{kl\}}_{\{ij\}}, \text{并且 } \phi^{\{ki\}}_{\{ij\}}=0.$$

当考虑 $SU(2)\times U(1)$ 性质时，将每一指标都按其值为 1, 2 还是为 3 来区分，将指标取 3 时明显注明为 3，另外由于 $SU(2)$ 群的表示为实表示，因此实际不必区分上下指标；在有两个下指标时，由于完全对称性 $SU(2)$ 的表示总取最大 I 值，但当同时有上下指标时，原则上按 $SU(2)$ 的表示来看多种 I 值都是允许的，阵迹为零的条件则相当于只要取 I 最大值就行了.

按照这些规则，可以把张量 $\phi^{\{kl\}}_{\{ij\}}$ 所描述的表示 $D(2,2)$ 按 $SU(2)\times U(1)$ 分解为

$$\begin{aligned}
D(2,2)=&D(\phi^{\{kl\}}_{\{ij\}})+D(\phi^{\{k3\}}_{\{ij\}})+D(\phi^{\{kl\}}_{\{i3\}})\\
&+D(\phi^{\{33\}}_{\{ij\}})+D(\phi^{\{kl\}}_{\{33\}})+D(\phi^{\{k3\}}_{\{i3\}})\\
&+D(\phi^{\{k3\}}_{\{33\}})+D(\phi^{\{33\}}_{\{i3\}})+D(\phi^{\{33\}}_{\{33\}})\\
=&D(\phi\{ijkl\})+D(\phi\{ijk\}^{3})+D(\phi\{ijk\}_{3})\\
&+D(\phi\{ij\}^{33})+D(\phi\{ij\}_{33})+D(\phi\{ij\}^{3}_{3})\\
&+D(\phi\{i\}^{3}_{33})+D(\phi\{i\}^{33}_{3})+D(\phi^{33}_{33})\\
=&\Phi(2,\ 0)+\Phi\left(\frac{3}{2},1\right)+\Phi\left(\frac{3}{2},-1\right)+\Phi(1,2)\\
&+\Phi(1,-2)+\Phi(1,0)+\Phi\left(\frac{1}{2},-1\right)+\Phi\left(\frac{1}{2},1\right)\\
&+\Phi(0,0).
\end{aligned}$$

其中指标 i,j,k,l 都是取值为 1 或 2，在分解成 $SU(2)$ 的张量表示时，可以不必区分上指标和下指标. 但取值为 3 而保留下来的

指标由于是反映 $U(1)$ 变换性质的，仍然需要区分其指标是上指标还是下指标．上式中最后一行描述 $SU(2)\times U(1)$ 不可约表示的记号是 $\Phi(I,Y)$．

从这个例子可以看出，按照这些规则可以将 $SU(3)$ 群的不可约表示按子群 $SU(2)\times U(1)$ 的表示分解，所得结果和用权图表出或用 $Y—I$ 图给出的结果是一样的．但是实际上，用 $Y—I$ 图给出时远比用张量描述要简单得多．

3．表示直乘的分解

表示直乘分解问题也可以用张量描述来处理，我们通过一个例子来看处理的办法．

考虑 $D(2,0)\times D(2,0)$，把它们写成张量形式可表为 $\phi_{\{ij\}}$ 和 $\psi_{\{kl\}}$，它们的直乘即

$$\phi_{\{ij\}}\ \psi_{\{kl\}}.$$

这是一个可约表示，要分解成不可约表示的直和，首先要把下标进行对称化和反对称化处理．4 个下标完全对称化的结果 $(\phi\psi)_{\{ijkl\}}$ 是一个不可约表示 $D(4,0)$．考虑反对称的情形时，需要分别考虑所有指标中两两对称或反对称的情况，在这个例子中有 $\{ij\}$ 和 $\{kl\}$ 两对，因此就有两种情形：一种情形是 i 和 k 对称，j 和 l 反对称（或反过来），这时将反对称的一对指标升到上标去，不升的指标仍对称化，并且上下标间阵迹为零，亦即得到一个不可约表示

$$\epsilon^{jlm}\phi_{\{ij\}}\ \psi_{\{kl\}} = (\phi\psi)^{m}_{\{ik\}},$$

也就是 $D(2,1)$；另一种情形是 i 和 k 反对称，j 和 l 也反对称，这时将两对下标都上升上去，得到的两个上标仍然对称化，即又得一个不可约表示

$$\epsilon^{ikm}\epsilon^{jln}\phi_{\{ij\}}\ \psi_{\{kl\}} = (\phi\psi)^{\{mn\}},$$

也就是 $D(0,2)$．

经过这样处理，我们得到

$$D(\phi_{\{ij\}}\psi_{\{kl\}})=D((\phi\psi)_{\{ijkl\}})+D((\phi\psi)^{m}_{\{ij\}})+D((\phi\psi)^{\{mn\}}),$$

也就是

$$D(2,0)\times D(2,0)=D(4,0)+D(2,1)+D(0,2).$$

在作表示直乘分解的定量计算时，张量描写是一个标准的方法，但是就解决直乘分解的问题本身来看，它显然比杨图法和士马法要繁得多.

4. 张量描述的一些说明

从上面的讨论来看，$SU(3)$群不可约表示的描述及有关的各种性质的讨论，都可以通过张量描述来进行，然而所作的讨论和计算往往并不比其它方法优越. 既然如此，为什么还要强调张量描述，其主要的优点反映在哪里.

值得注意的是以下几点:

(1) 张量描述对于各种不同的表示在$SU(3)$群变换下的变换性质，给出了一个统一的表述，这就为比较和分析各不同表示变换性质的异同及其相互联系提供了一个有利工具.

(2) 在讨论几个不可约表示如何组成不变量时，张量描述提供了极其简单而明确的规则，这是张量描述特有的优点. 由于在物理研究工作中，经常要处理给出群变换下的不变量的问题，因此张量描述在物理研究中很重要.

(3) 推广到$SU(N)$，$N>3$时也可用张量描述.

§7.4 $SU(N)$群的表示

1. $SU(N)$群的表示的一般性质

考虑$SU(N)$群的表示，当$N>3$时，许多$SU(3)$群表示的描述方法和性质可以类比地推广过来，当然也有一些性质和方法是$SU(3)$群所特有的，这些难于直接推广过去. 在本节里，我们仅就前一方面作扼要的讨论.

$SU(N)$群的不可约表示用 $l=N-1$ 个参数 $\lambda_i, i=1,\cdots,l$ 来描述，记作 $D(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{N-1})$，前面已介绍表示的维数公式. 表示可以用杨图描述如图 7.20所示，前面也已经介绍了这个表示的共轭表示的杨图.

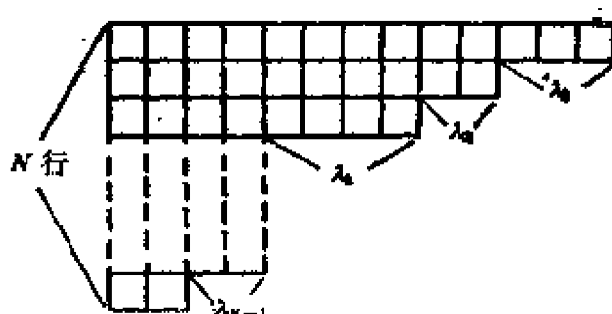


图 7.20　$SU(N)$群表示杨图

$SU(3)$群的表示可以分为 3 类，相应地 $SU(N)$群的表示可以分为N类，类的划分也是按杨图上格子数以N为模数的值来进行，即按

$$\sum_{i=1}^{N-1} i\lambda_i \pmod N$$

来分类. 这个标志类的参数可以取作绝对值尽可能地小，也可以取作从 0 到 $N-1$，为了讨论方便，我们采取前一种约定并称之为类数

$$g(D)=\sum_{i=1}^{N-1} i\lambda_i \pmod N,$$

且

$$|g(D)|\leqslant\frac{N}{2}.$$

类数有下列性质：

(1)　$g(D^*)=-g(D)$即共轭表示属于类数变号的那一类，因此常把类数差一负号的两类称为“相互共轭”，上式即表示：共轭表

示属于共轭的类中.

(2) 如果D是自共轭表示,则D所属的类的类数满足

$$g(D)=-g(D)(\bmod N),$$

当 $N=$奇数时,只有一个解,$g(D)=0$; 当 $N=$偶数时,有两个解,$g(D)=0$ 或 $\pm\frac{N}{2}$.

这种自共轭表示可以存在的类称为自共轭类.

(3) 自共轭表示一定属于自共轭类, 但是自共轭类中的表示并不一定是自共轭表示,然而这些表示的共轭表示仍在同一类中.

(4) 在表示直乘分解时, 类数在 $\bmod N$ 意义下是守恒的.

(5) 在 $SU(N)$不变的理论中, 类数 $g(D)$是在 $\bmod N$ 意义下的守恒量,或者说

$$e^{i\frac{1}{N}2\pi g(D)}=\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{N-1}k\lambda_k\right)$$

是一个分立变换型的守恒量(即在乘法意义下守恒).

$SU(N)$群表示的分类及类数守恒的性质在物理上非常重要,因为$SU(N)$群是一个常用的李群,$SU(N)$不变性带来的与连续变换相应的守恒荷是自然被注意到的. 然而类数作为一个守恒量实际上具有分立变换守恒量的特点,这就使它常常被忽略掉.

$SU(N)$群有一个中心 Z_N, 即 N 阶循环群. Z_N 是 $SU(N)$群的不变子群, 然而它并不是连续群而是分立群. Z_N 作为 $SU(N)$的子群,它所给出的对称性当然被包含在 $SU(N)$的对称性中, 但是由于 Z_N 是分立群, 它的对称性的表述又以不同于连续群的形式表现出来而可能被忽略掉.

按照 Noether 定理,一定的不变性对应存在相应的守恒量.对于分立变换来说,守恒量就是分立变换本身,并且守恒以相乘的形式体现出来. 对于 Z_N 群,生成元的本征值是$e^{i\frac{1}{N}2\pi}$ 的整数次幂. 上

面的讨论只是给出这个整数对一个表示取一个确定值，即前面给出的类数 $g(D)$.

类数的意义可以和杨图直接联系起来，每一个表示 $D(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$ 可以用杨图来描写，所采用的格子数为

$$\sum_{k=1}^{N-1} k\lambda_k + N_x \quad (\text{任意正整数或零}),$$

因此用杨图来描述时所采用的格子数可以差 N 的整数倍. 在表示直乘分解时，一个表示的杨图可以拆开，把格子加到另一表示的杨图上去，但在这过程中格子数目不能改变. 如果有 N 个格子排成一列，则在确定表示性质时，这 N 个格子就不起作用了. 因此在表示直乘分解时，格子数在 mod N 意义下是守恒的.

从这个分析来看，可以在 mod N 意义下给定格子数，作出不同的杨图，反映不同的表示. 这些格子排法的改变，代表了给定格子数下的表示间的变换. 这个变换是分立型变换，因为不同杨图之间不能连续地变过去，这个变换下的守恒量即在 mod N 意义下的方格数. 这就是类数的杨图含意，由于这个守恒量是在 mod N 意义下守恒，它只有 N 个独立的可取值.

由类数守恒给我们一个重要启示：如果一个理论具有李群 G 所描写的对称性，在注意李群 G 的连续对称性的表现的同时，还应该特别注意考虑李群 G 的分立型子群，特别是分立型不变子群. 这些子群的对称性，虽然原则上已包含在李群 G 的对称性中，但由于其以不同于连续群的方式表述出来而容易被忽视.

2. 群链及表示的分解

$SU(3)$ 群表示的权图描写推广到 $SU(N)$，$N>3$ 时，就不是在二维平面上而是在 $N-1$ 维空间作出权图，这样实际上不能具体实现，从而也就丧失了权图的优越性.

$SU(3)$ 群表示的 $SU(2)\times U(1)$ 图描写可以推广到 $SU(N)$ 群，

$N>3$的情形. 当然这样推广后，许多优点仍然保持下来，但也有些 $SU(3)$ 群所特有的优点在推广后就不那么明显了，本节扼要地介绍这个推广.

$SU(N)$ 群有很多子群，考虑其中特殊的一种，即 $SU(N-1)\times U(1)$，而 $SU(N-1)$ 群又可作类似的处理，这样我们就得到一个子群链

$$SU(N)\supset SU(N-1)\times U(1)\supset SU(N-2)\times(U(1))^2\supset\cdots\cdots\supset SU(2)\times[U(1)]^{N-2}.$$

当然 $SU(N)$ 按子群分解还可以有别的群链，但是这个群链在物理研究中往往用得比较多. 产生这样的情况的原因在于：如果物理问题有比较大的群所描述的对称性，这个对称性往往不是始终严格保持，而是有一定程度的破缺，这就需要考虑保留尽可能大的不破缺的对称性. 显然，如果考虑 $SU(N)$ 对称性有不大的破缺而保留较大的对称性的话，则很有可能这破缺只表现为将 $SU(N)$ 拆成 $SU(N-1)\times U(1)$，而 $SU(N-1)\times U(1)$ 的对称性仍很好保持. 产生这类破缺的物理原因往往是由于体现 $SU(N)$ 对称性的第 N 轴方向与其它轴有一些不大的差异，当这个差异可以忽略时，近似地可以看作 $SU(N)$ 对称，当考虑了这些差异的影响时，$SU(N)$ 对称不再保持，但 $SU(N-1)\times U(1)$ 对称性仍然保持.

在夸克模型发展过程中，研究强相互作用的味整体对称性时，最先发现同位旋 $SU(2)$ 和超荷 $U(1)$ 是很好的对称性，而包含 $SU(2)\times U(1)$ 作为子群的 $SU(3)$ 群对称性只是近似的. 后来发现粲粒子，味对称性又推广到 $SU(4)$，而 $SU(3)$ 是保持程度比 $SU(4)$ 更高的对称性，而底夸克发现后，味对称性又推广到 $SU(5)$，$SU(4)$ 比起 $SU(5)$ 来说还是保持得更好的对称性. 夸克模型中味 $SU(N)$ 整体对称性的破缺情况，正是上面所介绍的子群链描写的情况.

利用这个子群链可以标记和描写 $SU(N)$ 的表示，首先看典型的分解过程：$SU(N)$ 按 $SU(N-1)\times U(1)$ 分解，$SU(N)$ 的一个表示可以用 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$ 来标记，也可以等价地用 $(C_2,\cdots,C_N)$ 来标记，其中 C_i 是 Casimir 算符本征值，$U(1)$ 群的表示可以用生成元的本征值 Y 来标记．这样在这个分解过程中，$SU(N)$ 群一个表示的 $SU(N-1)\times U(1)$ 含量可以用 $C_2^1,\cdots,C'_{N-1},Y'$ 来标记．然后 $SU(N-1)$ 再作这样的分解，如果我们用 $C_1^{(k)}$ 标记 $SU(N-k)$ 的 Casimir 算符本征值，用 $Y^{(k)}$ 标记同时相应分解出的 $U(1)$ 群生成元的本征值，则按这子群链 $SU(N)$ 群一个表示中的态可以用

$$(C'_2,C'_3,\cdots C'_{N-1};C''_2,\cdots,C''_{N-2};\cdots C_2^{(N-3)},C_3^{(N-3)};C_2^{(N-2)};$$
$$Y',Y'',\cdots,Y^{(N-2)},I_3)$$

来完全标记，这样的标记是无简并的．

要注意的是：尽管 $SU(N)$ 的秩为 $l=N-1$，标志 $SU(N)$ 表示中的态可以用 $N-1$ 个可加量子数，且只存在 $N-1$ 个有共同本征态的可加量子数，它们可以取作其本征值为 $Y',Y'',\cdots,Y^{(N-2)}$，I_3 的这 $N-1$ 个生成元．但是用这组本征值来标记 $SU(N)$ 表示中的态是不完全的，因为给定一组这样的本征值之后，对应的有可能是多个态，即存在简并．要完全解除简并，必须如上面所述，同时引入子群链所涉及全部 Casimir 算符的本征值，这样完全地标记出 $SU(N)$ 某一表示中的态共需

$$\sum_{k=1}^{N-1} k=\frac{1}{2}N(N-1)$$

个参量，如果要把 $SU(N)$ 的该表示也标记出来，则需要再加 $N-1$ 个 Casimir 算符本征值，即共需 $\frac{1}{2}(N+2)(N-1)$ 个参量．

现在要讨论的是，如果给定 $SU(N)$ 的一个表示 $D(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$，按分解 $SU(N)\to SU(N-1)\times U(1)$ 来看，这个表示中含有

的 $SU(N-1)\times U(1)$ 表示共有哪些．我们利用杨图来说明，为具体起见，以 $N=4$ 的例子来表述．$SU(4)$ 的表示 $D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的最简杨图如图 7.21 所示(即指不包括一列 4 格的图)．对于每一列来说，由于是完全反对称的，如果把每格中加上指标(可取 1,2,3,4 中任一值)，则同一列中指标必须不同．我们利用反对称性质总可把指标排列为同一列中自上而下指标由小到大，这时每一列中最大指标总在下面．

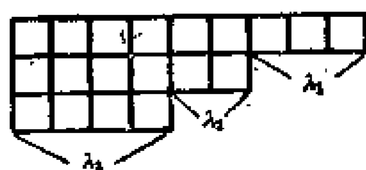


图 7.21　$SU(4)$ 群表示杨图

对于 $SU(4)\rightarrow SU(3)\times U(1)$ 分解过程，可以如下地来分析：$SU(3)$ 只涉及指标 1,2,3，因此指标为 4 对 $SU(3)$ 表示无贡献．可以把 $SU(4)$ 杨图中的格子内凡标号为 4 的除掉，剩下的图即所包含的 $SU(3)$ 表示之一的杨图．由于 $SU(3)$ 群表示杨图中有 3 格的列实际就不起作用了，因此判断该杨图代表的是什么 $SU(3)$ 表示只是其中 2 行部分．例如对 $SU(4)$ 的 $D(3,2,4)$ 表示，其中包含的 $SU(3)$ 表示之一，$D(3,2,4)\longrightarrow D(4,3)$，可以如图 7.22 给出



图 7.22　$SU(4)\rightarrow SU(3)\times U(1)$ 表示分解杨图

这样虽然给出其中所包含的 $SU(3)$ 表示之一，但并不标出其所对应的 $U(1)$ 量子数．为了标记起来方便，我们取 $SU(4)\rightarrow SU(3)\times U(1)$ 中的 $U(1)$ 量子数归一化为：对于基本表示其本征值为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，

$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, 亦即 $U(1)$生成元重新取作相当于 $SU(4)$基本表示中的表示矩阵为

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

这样上面得到的 $D(4,3)$表示对应的 $U(1)$量子数为$-5/4$，可以记作 $D\left(4,3\middle|-\frac{5}{4}\right)$.

但是 $D(3,2,4)$中包含的 $SU(3)$的 $D(4,3)$表示并不止一个，实际上如图 7.23 所示也是一种，它对应的$U(1)$量子数为 $7/4$，因此可以标记为 $D\left(4,3\middle|\frac{7}{4}\right)$.



图 7.23 $D\left(4,3\middle|\frac{7}{4}\right)$表示杨图

按照上面的规则来涂掉一些格子时，由于杨图上同行格子有对称性质，因此我们总可把同一行中涂掉的放在右边，这样可以避免重复．此外，由反对称性要求，每一列中最多涂掉最下面一个格子．最后把这样处理所得一切可能杨图结果都加起来就是 $D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$中所包含的一切 $SU(3)\times U(1)$表示分量.

现在把上面的讨论整理如下，对于表示 $D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$总可把每一个 λ_k 分成两部分
$$\lambda_k=\lambda_k'+\lambda_k'',$$
其中 λ_k' 相应于涂掉最下格子的列数，每一种可能的分法对应得到一个 $SU(3)$表示

$$D(\lambda_1''+\lambda_2',\lambda_2''+\lambda_3')=D(\lambda_1-\lambda_1'+\lambda_2',\lambda_2-\lambda_2'+\lambda_3'),$$

这个表示的 $U(1)$ 量子数本征值为

$$\frac{1}{4}[\lambda_1'' + \lambda_2' + 2(\lambda_2'' + \lambda_3') + 3\lambda_3'' - 3(\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3')]$$

$$= \frac{1}{4}[\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - 4(\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3')],$$

这样这个表示应表述为

$$D\left(\lambda_1 - \lambda_1' + \lambda_2', \lambda_2 - \lambda_2' + \lambda_3 \left| \frac{1}{4}\left[\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - 4(\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3')\right]\right.\right).$$

而 $SU(4)$ 群的表示 $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 按 $SU(3) \times U(1)$ 表示分解的表达式为上述表示对 $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ 分别独立求和，即

$$D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$= \sum_{\lambda_1'=0}^{\lambda_1} \sum_{\lambda_2'=0}^{\lambda_2} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda_3} D(\lambda_1 - \lambda_1' + \lambda_2', \ \lambda_2 - \lambda_2' + \lambda_3' \, |$$

$$\frac{1}{4}[\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - 4(\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3')]).$$

把这个讨论可以直接推广到表示按

$$SU(N) \longrightarrow SU(N-1) \times U(1)$$

分解的描述，得到的结果为

$$D(\lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1}) = \sum_{\lambda_1'=0}^{\lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_{N-1}'=0}^{\lambda_{N-1}}$$

$$D\left(\lambda_1 - \lambda_1' + \lambda_2', \cdots, \lambda_{N-2} - \lambda_{N-2}' + \lambda_{N-1}'\right.$$

$$\left.\left| \frac{1}{N}\left[\sum_{k=1}^{N-1} k\lambda_k - N\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k'\right]\right.\right).$$

注意$U(1)$量子数又可写作

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k}{N}\lambda_k-\sum_{k=1}^{N-1}\lambda'_k,$$

其中可变部分为λ'_k，它的变化带来这量子数的改变总是整数。至于这量子数是否是整数完全由第一项决定，而在给定$SU(N)$表示后这一项就完全确定了。

如果将$SU(N)\longrightarrow SU(N-1)\times U(1)$中$U(1)$的这个如上定义的量子数记作$Y'$，则在$SU(N)$群的一个表示$D(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$按$SU(N-1)\times U(1)$的表示分解时，$Y'$的取值为一最大取值减一个正整数，不同的$SU(N-1)\times U(1)$表示的差别只反映在该正整数值可以不同，即

$$Y'=Y'_{\max}-\sum_{k=1}^{N-1}\lambda'_k,$$

其中

$$Y'_{\max}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k}{N}\lambda_k.$$

这样我们就将$SU(3)$群不可约表示按$SU(2)\times U(1)$群表示分解的方法普遍推广到了$SU(N)$群不可约表示按$SU(N-1)\times U(1)$群表示分解的情形，给出了普遍的方法和公式。

上面给出的$Y'_{\max}$还有明确的意义，因为$SU(N)$群表示的类数为

$$g(D)=\sum_{k=1}^{N-1}k\lambda_k(\mathrm{mod}\ N).$$

因此$Y'_{\max}$实际上和$g(D)/N$只差整数，实际上$Y'_{\max}$取什么分数

值完全和表示的分类有关．换言之，$SU(N)$群的两个不可约表示属于同一类的必要充分条件是它们的Y'_{max}之间只差整数．正因为如此，有时可用Y'_{max}代替类数$g(D)$来进行讨论．

$SU(N)$群的表示$D(\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1})$按这样分解时，分解成的$SU(N-1)\times U(1)$表示的数目为

$$\sum_{\lambda'_1=0}^{\lambda_1}\sum_{\lambda'_2=0}^{\lambda_2}\cdots\sum_{\lambda'_{N-1}=0}^{\lambda_{N-1}}1=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots\cdots(1+\lambda_{N-1}).$$

这个公式可以用来作为检查所作分解是否有遗漏的依据．对于$N=3$时，它给出$(1+\lambda)(1+\mu)$，这正是引入$Y-I$图的一个依据．

3．$SU(N)$群表示的一些说明

表示的张量描写同样可以推广到$SU(N)$情形，特别是在讨论群变换下如何组成不变量时常用，但是在$SU(3)$群的情形，可以利用3阶完全反对称单位张量将两个反对称的下指标换成一个上指标，或把两个反对称的上指标换成一个下指标．这样就可以在$SU(3)$群表示的张量描写中，把所有的反对称指标都换掉，从而只要处理对称指标就行了．这是$SU(3)$群表示的张量描写中最有利的方面．然而对$SU(N)$群，相应的完全反对称单位张量是N阶的，利用它可以把k个反对称的下指标(或上指标)换成$N-k$个完全反对称的上指标(或下指标)，因此一般来说，总是要同时遇到指标的对称性和反对称性，不再像$SU(3)$情形那么简单．

在$SU(3)$时，我们介绍了几种表示直乘分解的方法．其中权图法推广到$SU(N)$时要在$N-1$维空间作图，实际不可能具体作，也不显示其直观性的特点．士马法也不可能直接推广，而从广义角度的推广和杨图法密切相关，杨图法和张量法是可以直接推广的，是一般普遍采用的方法．特别是杨图法，因其仍保持简单直观的特点，采用得较多．

在采用杨图法来处理 $SU(N)$ 群表示直乘分解问题时，比起 $SU(3)$ 群情形的改变在于最后一条规则要求从右上到左下来数添加的格子，任何时候行数为 j 的格子数不少于行号为 $j+1$ 的格子数，其它规则都仍一样.

同样地也可用杨图法来解直乘分解的反问题，不难从 $SU(3)$ 群的此问题作法直接推广过来，这里就不再详细讨论了.

§7.5　整体对称性的破缺

在粒子物理关于整体对称性的研究中，常常遇到对称性破缺的问题. 最典型的是当初的味 $SU(3)$ 夸克模型，认为强相互作用满足 $SU(3)$ 对称性. 但是从实验来看，$SU(3)$ 群的 $SU(2)\times U(1)$ 子群的对称性能很好满足，反映于同位旋和奇异数守恒，然而 $SU(3)$ 对称性则并不很好满足. 因此理论认为，拉氏量总起来说满足 $SU(3)$ 整体对称性，但里面掺了少量的 $SU(3)$ 破缺项，这破缺项能反映第 3 维和前两维的差别，它在 $SU(3)$ 群变换下不是标量，在 $SU(2)\times U(1)$ 变换下则应是标量，这个 $SU(3)$ 破缺项可取作按 $D(1,1)$ 表示的 I_8 变换的项. 考虑这破缺项带来的影响时却遇到了困难，因为按通常的观念，应将破缺项作为小量而用微扰论展开来处理，然而实际对破缺项只是从群变换性质上来了解，并不能像通常那样通过微扰论展开来逐级进行定量计算.

考虑对称性破缺的最重要结果是关于质量的讨论，它也可以作为处理整体对称性破缺的典型例子. 当 $SU(3)$ 对称性不破缺时，属于 $SU(3)$ 群同一表示的各粒子质量应该相同. 当 $SU(3)$ 对称性有由 $D(1,1)$ 的 I_8 所描写的破缺项时，同一表示中各粒子质量可以不同，即所谓的质量分裂. 如果只考虑到破缺的一级项贡献（即 $D(1,1)$ 的 I_8 作用一次的贡献），由于一般的

$$D(\lambda,\mu)\times D(1,1)\longrightarrow D(\lambda,\mu)$$

分解中得到的 $D(\lambda,\mu)$ 最多有两个独立的项，这表明考虑到破缺的一级项时将最多有两个独立的反映质量分裂的项. 另一方面，对 $D(\lambda,0)$ 和 $D(0,\mu)$ 来说，与 $D(1,1)$ 直乘分解中则只含一个 $D(\lambda,0)$ 或 $D(0,\mu)$ 表示. 这表明在普遍的一级质量分裂公式中，虽然有两个独立的质量分裂参数，但对 $D(\lambda,0)$ 和 $D(0,\mu)$ 表示，则应退化为只含一个独立的质量分裂参数.

根据这些要求，可以推测一级质量分裂的普遍形式. 首先它应包含一项常数，反映 $SU(3)$ 不变项，它对每一表示各分量取一个统一的值，我们可记作 A. 对于破缺项，显然一项可取为正比于 Y 的项，这里 Y 的定义如前面给出的为

$$Y=\frac{2}{\sqrt{3}}I_8,$$

即对基本表示，其矩阵形式为

$$Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

这项表为 CY.

现在需要找另一项独立的反映一级破缺的项. 由于满足使 $SU(2)\times U(1)$ 不变的生成元只有 I_8，即上面引的 Y 项，因此就需考虑生成元的二次形式. 2 阶 Casimir 算符 C_2 是 $SU(3)$ 不变的. 如只要求保持 $SU(2)\times U(1)$ 不变，则 C_2 可拆成 3 项之和，即

$$I_1^2+I_2^2+I_3^2=I^2;$$

$$I_4^2+I_5^2+I_6^2+I_7^2;$$

$$I_8^2=\frac{3}{4}Y^2.$$

由于 C_2 是 $SU(3)$ 不变的，第二项的影响总可以归结为另两项，这样这个一级破缺项应正比于

$$I^2+\eta Y^2,$$

其中 η 为某待定参量．要确定 η 的取值可以利用 $D(\lambda,0)$ 和 $D(0,\mu)$ 的退化条件，对于 $D(\lambda,0)$ 表示

$$Y=-\frac{2}{3}\lambda+2I,$$

即

$$I=\frac{Y}{2}+\frac{1}{3}\lambda;$$

对于 $D(0,\mu)$ 表示

$$Y=\frac{2}{3}\mu-2I,$$

即

$$I=-\frac{Y}{2}+\frac{1}{3}\mu.$$

代入 $I(I+1)+\eta Y^2$ 后，按退化条件应退化成 Y 的线性函数即与 CY 项可合并，这样定出 $\eta=-\frac{1}{4}$，这项可表为

$$B\left[I(I+1)-\frac{1}{4}Y_2\right].$$

注意，在前面写 I^2 时是指算符 $I^2=I_1^2+I_2^2+I_3^2$，后面写作 $I(I+1)$ 则是算符 I^2 的本征值．

把以上结合起来，得到 $SU(3)$ 破缺一级质量分裂公式为

$$M(I,Y)=A+B\left[I(I+1)-\frac{1}{4}Y^2\right]+CY,$$

其中 A，B，C 对于给定一个表示取确定值．由于物理上的原因，对重子来说 M 代表质量，对介子来说 M 代表质量平方．

这个质量分裂公式首先由 Gell-Mann 和大久保导出，它在确立强子的 $SU(3)$ 对称性理论并为夸克模型的建立准备条件方面起过重要的作用．后来把强相互作用的味对称性推广到 $SU(4)$ 和 $SU(5)$ 时，相应的质量分裂公式也类似地导出来了．

要提醒的是，这里谈的整体对称性的破缺和以后要讨论的定域对称性的破缺在概念和机理上都是完全不同的．这一点应当注意．

实验上已发现的$J^P=\frac{1}{2}^+$重子有8个，正好归入一个8维表示，它们的质量应满足如下的质量关系：

$$2N+2\Xi=3\Lambda+\Sigma,$$

把实验值代入，等式两边分别等于4514.1 MeV和4540.0 MeV，两边的差小于千分之六，这表明质量关系很好地得到满足．60年代初期，实验上发现了8个$J^P=0^-$介子，它们如果属于同一表示，应该满足质量平方关系：

$$4K=3\eta+\pi,$$

把实验值代入，等式两边分别等于0.9827 GeV^{2}和0.9226 GeV^2，差为6%．60年代，实验上发现了9个$J^P=1^-$介子，它们应构成一个八维表示和一个一维表示，需要判断两个$I=0$，$Y=0$的粒子ω和ϕ中哪一个属于8，哪一个是1．利用上面的质量平方关系，预言八维表示中$I=0$，$Y=0$粒子的质量$m_8=929.2$ MeV．ω和ϕ粒子质量的实验值分别是(781.95 ± 0.14)MeV和(1019.412 ± 0.008)MeV．这两个粒子中哪一个也不能简单地归入这个8维表示．

从理论上来考察，既然味$SU(3)$对称性的破缺反映在质量上是在质量中有按8维表示变换的部分，它也将导致一维表示和8维表示之间跃迁质量项出现，这项的出现使两个$I=0$，$Y=0$的粒子质量平方要用一个2×2矩阵来描写，除了对角元为m_8^2和m_1^2外，非对角元为$m_{18}^2(=m_{81}^2)$，物理上观察到的粒子是这个质量平方矩阵的本征态，观察到的质量值由这个矩阵的本征值决定，这样物理上观察到的两个$I=0$，$Y=0$的粒子分别都不属于纯8维表示或一维表示，它们都是8维表示和一维表示中两个$I=0$，$Y=0$

粒子的叠加态，通常称为混合态，在这个质量平方矩阵中，m_8^2 的值可以由 8 维表示中其它几个粒子质量的实验值算出，但 m_1^2 和 m_{18}^2 则是未知的量，它们需要从物理上观察到的混合态的质量和性质来推算.

粒子物理中常常用一个 3×3 矩阵 M 来统一描写介子的 8 维表示和一维表示的场量. 在没有混合时，这矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta_8}{\sqrt{6}}+\frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta_8}{\sqrt{6}}+\frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}}+\frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

味 $SU(3)$ 对称的质量项可以表为

$$\frac{1}{2}m^2\mathrm{Tr}(MM).$$

这时 8 维表示和一维表示中的 9 个粒子的质量相同，都是 m. 如果质量项有对称性破缺，可以引入附加的质量破缺项

$$-\sqrt{3}\,\delta\mathrm{Tr}(M\lambda_8M).$$

这样介子的质量平方为

$$\pi=m^2-2\delta,\qquad K=m^2+\delta,$$

$$m_8^2=m^2+2\delta,\qquad m_1^2=m^2.$$

如果 η 就是 8 维表示的 $I=0, Y=0$ 分量，则有 $\eta=m_8^2$，满足上面给出的质量分裂关系. 然而这时同时还出现质量混合项

$$m_{18}^2=2\sqrt{2}\,\delta.$$

对角化后给出质量本征态为 η 和 η'，其质量平方为

$$\eta=m^2-2\delta,\qquad \eta'=m^2+4\delta,$$

这时实际上是后面所说的“理想混合”. 由于即使在对称性没有破缺时，8 维表示和一维表示的质量也不一定相同，还可以有一维表

示的附加质量项

$$\frac{1}{2}(m_1^2-m^2)\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(M).$$

这项的存在使混合偏离理想混合.

利用 $J^P=0^-$ 介子的符号来表述混合的描写，8 维表示和一维表示中两个 $I=0, Y=0$ 粒子分别用 η_8 和 η_1 来表示，混合后观察到的两个粒子为 η 和 η'，它们之间的关系可以写作

$$\eta=\eta_8\cos\theta-\eta_1\sin\theta,$$

$$\eta'=\eta_8\sin\theta+\eta_1\cos\theta,$$

其中 θ 为混合角，其值利用观察到的粒子质量平方由下式定:

$$\tan^2\theta=\frac{4K-\pi-3\eta}{3\eta'+\pi-4K},$$

这里粒子的符号代表该粒子质量的平方，质量平方矩阵中各元由下列等式定:

$$m_8^2=\frac{1}{3}(4K-\pi),$$

$$m_1^2=\eta+\eta'+\frac{\pi}{3}-\frac{4K}{3},$$

$$(m_{18}^2)^2=\frac{1}{9}(3\eta'+\pi-4K)(4K-\pi-3\eta),$$

由此可见，没有表示混合的充要条件是 η 或 η' 满足 8 维表示的质量分裂公式.

在有混合时，介子场量矩阵变为

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\alpha\eta+\beta\eta' & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\alpha\eta+\beta\eta' & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \gamma\eta+\delta\eta' \end{bmatrix}$$

其中

$$\alpha=\frac{\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{6}},\qquad \beta=\frac{\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{6}},$$

$$\gamma=-\frac{\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta}{\sqrt{3}},\qquad \delta=\frac{-\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{3}},$$

由此可见，如果混合角满足

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即 $\theta=35.3°$ 时，$\alpha=\delta=0$，两个粒子在矩阵中完全分开，这时称为"理想混合"。上面给出，如果破缺前介子8维表示和一维表示的质量是简并的，破缺时将产生理想混合。从现有实验出发，已经可以定出 $J^{PC}=0^{-+}$，1^{--}，2^{++}，3^{--} 介子的8维表示和一维表示的混合角。

§7.6 介子、胶球、多夸克态和混杂子的对称性

1. 正反费米子组成的系统

在现代强子结构模型中，介子是有一对价夸克和价反夸克的强子。介子的某些主要性质，特别是研究静态性质和低能行为时都可以把介子看作是一对自旋 $\frac{1}{2}$ 的正反费密子（正反夸克）的束缚态，因此重要的是首先要判定由一对自旋 $\frac{1}{2}$ 的正反粒子所组成的系统应该具有哪些量子数，以及这样的系统有哪些定性特征。

考虑由一对自旋 $\frac{1}{2}$ 的正反夸克所组成的系统，系统的总自旋 S 可取值为0和1，轨道角动量 L 可取任意非负整数值，系统的总角动量 J 可取值为 $J=|L-S|,|L-S|+1,\cdots,L+S$，系统的 C 宇称为 $C'=(-1)^{L+S}$，如果这系统是一个束缚态，整体表现为一个介子，J 也就是观察到的该介子的自旋，由上面的讨论得到这个介

子的 J^{PC} 量子数可取值列如表 7.2.

表 7.2　介子的 J^{PC}

L	$S=0$	$S=1$		
0	0^{-+}		1^{--}	
1	1^{+-}	0^{++}	1^{++}	2^{++}
2	2^{-+}	1^{--}	2^{--}	3^{--}
3	3^{+-}	2^{++}	3^{++}	4^{++}
…	…	…	…	…

如果原组成成分的夸克是 s,c,b 或 t夸克,其同位旋 $I=0$,则所组成介子的 $I=0$, 并且$G'=C'$. 如果原组成成分的夸克是 $I=\frac{1}{2}$的 u 或 d 夸克，则表 7.2 中每一组量子数所代表的态又代表了一个 $I=0,G'=C'$ 的介子和一个 $I=1,G'=-C'$ 的介子，结果这系统 I^G J^{PC} 可取值列如表 7.3.

表 7.3　u 和 d 夸克组成介子的 I^GJ^{PC}

L	$S=0$		$S=1$					
0	0^+0^{-+}	1^-0^{-+}			0^-1^{--}	1^+1^{--}		
1	0^-1^{+-}	1^+1^{+-}	0^+0^{++}	1^-0^{++}	0^+1^{++}	1^-1^{++}	0^+2^{++}	1^-2^{++}
2	0^+2^{-+}	1^-2^{-+}	0^-1^{--}	1^+1^{--}	0^-2^{--}	1^+2^{--}	0^-3^{--}	1^+3^{--}
3	0^-3^{+-}	1^+3^{+-}	0^+2^{++}	1^-2^{++}	0^+3^{++}	1^-3^{++}	0^+4^{++}	1^-4^{++}
…	…	…	…	…	…	…	…	…

如果组成介子的正反夸克之中只有一个是 u 或 d 夸克，或组成成分的夸克是 s,c,b 或 t 夸克，但正反夸克不是同一种夸克，这时介子将不是普通介子，即还有除同位旋以外的内部整体 $U(1)$ 量子数. 这时介子的 J^P 仍如表 7.2 所给出，介子仍有同位旋，但不再具有 C 宇称和 G 宇称.

在质量小于 2.8 GeV 的范围里，只有由 u，d 或 s 夸克及它们

的反夸克组成的介子出现，介子的味空间性质应由味 $SU(3)$ 对称性的表示来描写．u, d, s 夸克组成味 $SU(3)$群的表示 **3**，由这些夸克和反夸克组成的介子应属于味 $SU(3)$群的表示 1 和 **8**.

由于只有 u, d 夸克具有同位旋 $I=\frac{1}{2}$，因此，不论介子的质量是多少，其同位旋最大为 1，这是一个重子数为零的强子是介子的必要条件．

如果介子是由一对正反费密子对组成的束缚态．可以估计 $L=0$ 的态应为基态，其能量应为最低．按表 7.2，基态量子数应为 $J^{PC}=0^{-+}$ 和1^{--}，而 $J^{PC}=0^{++}$ 的态尽管其 J 值很小，却是 P 波激发态，从而应具有较高的能量．

实验上发现介子质量谱的排列符合上述两表要求的基本定性特征，这是对认为介子是由一对正反夸克组成的观点的重要支持．表 7.2 和表 7.3 还说明了具有哪些量子数的介子可以和一对正反费密子耦合（即如果能量允许的话，衰变成一对正反费密子），以及耦合（及衰变）是通过什么分波．一个值得注意的特征是：只有$J\geqslant1$ 的 $J^{PC}=$偶$^{++}$和奇$^{--}$ 的介子才有可能同时与相差 2 的两种轨道角动量的正反费密子对耦合；$J^{PC}=0^{++}$，偶$^{--}$和奇$^{++}$或$P'=-C'$的介子都只能与一种轨道角动量的正反费密子对耦合．这个特征对于分析新发现重介子的量子数时很重要．

2. 正反玻色子组成的系统

现在考察由一对自旋为 0 或 1 的正反玻色子组成的系统．按照上面类似的讨论，结果如表7.4 所示．

把这个表和一对正反费米子组成的系统的结果相比较，可以看到基态的量子数完全变了．在正反玻色子组成的系统中 1^{--} 态至少是 P 波激发态，0^{-+}态则只在组成成分自旋为 1 时的 P 波激发态中出现．

表 7.4　正反玻色子组成的系统的 J^{PC}

L	粒子 $S=0$	粒子 $S=1$		
	$S=0$	$S=0$	$S=1$	$S=2$
0	0^{++}	0^{++}	1^{+-}	2^{++}
1	1^{--}	1^{--}	0^{-+}　1^{-+}　2^{-+}	1^{--}　2^{--}　3^{--}
2	2^{++}	2^{++}	1^{+-}　2^{+-}　3^{+-}	0^{++}　1^{++}　2^{++}　3^{++}　4^{++}
…	…	…	…　…　…	…　…　…　…　…

如果组成成分的玻色子是纯中性粒子，即粒子与反粒子相同，按统计对称性要求还要受

$$L+S=\text{偶数}$$

的限制，亦即相当于在表中把所有 $C'=-1$ 的态去掉而仅保留 $C'=+1$ 态的结果.

这个表在分析普通介子的衰变行为时是很有用的. 例如，可以衰变到一对正反赝标介子的态量子数可以是 $J^{PC}=0^{++}$，1^{--}，2^{++}，…. 但可以衰变到一对纯中性赝标介子的态则只能是 $J^{PC}=0^{++}, 2^{++}, \cdots$. 按照这个规则，$J^{PC}=1^{--}$的 ρ^0 介子衰变到 $\pi^+\pi^-$ 态是允许的，但衰变到 $\pi^0\pi^0$ 态则是不允许的. 再如，只有 $C'=+$ 的态才有可能衰变为两个光子.

如果在讨论普通介子的衰变行为时要考虑 G 宇称，则只要把关于 G 宇称的分析加进去就可以了.

3. 奇特态和绝对奇特态

从上面的讨论中可以看到，由一对正反费密子不可能组成 J^{PC} 为

$$0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+}, \cdots$$

的态，这些态称为奇特态. 现在实验中已发现的大量强子中，还没有一个属于奇特态.

从表7.4 中还可以看出，由自旋为 1 的正反玻色子所组成的

系统可以具有下述奇特态的量子数:

$$J^{PC}=1^{-+},2^{+-},3^{-+},\cdots.$$

因此如果实验上发现了具有这些量子数的奇特态粒子，则它们不可能是一对正反夸克所组成的介子，但可能是由正反双夸克所组成的重子偶素.

零自旋的奇特态 $J^{PC}=0^{+-}$ 和 0^{--} 的共同特点是 $J=0$ 和 $C=-$，考虑一般的情形，如果一个由一对正反粒子所组成的系统总自旋 $J=0$，则要求 $L=S$，这样的系统一定有

$$C'=(-1)^{L+S}=+1.$$

也就是说，不论组成成分的自旋为什么值，不论通过什么轨道角动量分波，一对正反粒子组成的系统都不能构成零自旋的奇特态.因此零自旋的奇特态是“绝对奇特态”.

由于由一对正反夸克所组成的介子总同位旋最大为1，因此又把同位旋大于1的重子数为零的强子也称为奇特态.

4. 胶球的对称性

现代粒子物理理论认为，强相互作用是一种具有某种定域 $SU(3)$ 内部对称性的规范相互作用．这种对称性称为色对称性，这种相互作用称为色相互作用．夸克在 $SU(3)$ 对称性下按基础表示变化，$SU(3)$ 对称性的基础表示是3维表示，反映为每种夸克又各有3“色”，夸克与夸克之间的相互作用由传递称为胶子的规范粒子来实现．胶子的自旋为1，质量为零，共有 $3^2-1=8$ 种，分别对应 $SU(3)$ 群的8个生成元，构成 $SU(3)$ 群的正规表示．量子色动力学认为，色相互作用具有禁闭作用，即只有属于色 $SU(3)$ 单态的系统才能独立存在．按照这个性质，自由夸克和自由胶子都不可能自由地单独存在.

介子是由夸克及反夸克作为价粒子组合而成的色 $SU(3)$ 单态.两个或两个以上的胶子作为价粒子也有可能组成一个色 $SU(3)$

单态，这样的复合态统称胶球. 胶球的最大特征是味单态，即不论在味 $SU(3)$、$SU(4)$或 $SU(5)$ 群的变换下都属于一维表示. 当然味 $SU(3)$、$SU(4)$或 $SU(5)$群都有相当程度的破坏，增加了判断上的复杂性. 一个更强的判据是胶球的同位旋是零.

考察由两个胶子组成的胶球，考虑了色 $SU(3)$对称性后 8 种胶子是全同粒子，满足玻色统计. 由于胶球必须是色 $SU(3)$单态，在色空间上是对称的，因此在时空性质上也必须是对称的. 这样要求

$$L+S=\text{偶数},$$

从表7.4 中可以看出，两个胶子组成的胶球量子数只能是

$$J^{PC}=0^{++},0^{-+},1^{++},1^{-+},2^{++},2^{-+},\cdots.$$

但是由于胶子是规范粒子，它要满足规范不变性，静质量为零. 根据杨振宁定理，两个胶子组成的系统总角动量不能为一. 这样，两个胶子组成的胶球量子数只能是

$$J^{PC}=0^{+-},0^{-+},2^{++},2^{-+},\cdots.$$

三个胶子组成的胶球则可以取各种可能的量子数.

5. 多夸克态的对称性

实验和理论的研究表明，介子可以看作是一对正反夸克所组成的，夸克是自旋为$\frac{1}{2}$的费密子. 但是理论上也曾研究在夸克的基础上构造另一类束缚态. 首先两个价夸克结合成一个称为"双夸克"的集团，双夸克内部轨道角动量为零或较低的轨道角动量；再由一对正反价双夸克结合成一个束缚态. 这类束缚态称为重子偶素或四夸克态. 由一对正反双夸克结合成重子偶素的量子数规则由正反玻色子组成的系统的规则描写.

下面讨论双夸克内部轨道角动量为零的重子偶素可能的量子数.

要研究重子偶素的对称性，首先要讨论双夸克的对称性．下面暂限于在 u,d 或 s 夸克范围内讨论，亦即在味 $SU(3)$ 对称性基础上讨论．首先要讨论清楚双夸克的对称性质，夸克的色 $SU(3)$ 对称性质属于表示 **3**，双夸克的色 $SU(3)$ 对称性质可以属于表示 **6** 或 $\mathbf{3}^*$．在两个夸克结合成双夸克时，前者是对称耦合，后者是反对称耦合．由于夸克是费米子，满足费米统计，也就决定了前者对应的味 $SU(3)$ 对称性质和时空对称性质合起来必须是反对称的，后者对应的味 $SU(3)$ 对称性质和时空对称性质合起来必须是对称的．

确定了双夸克的对称性之后，也就可以按照上述正反玻色子组成的系统的规则给出所组成的重子偶素的量子数，所给出的结果列如表7.5．

表 7.5　(qq) 内部轨道角动量为零时重子偶素的量子数

$(qq)SU(3)_c$	6 对称		3^* 反对称	
$(qq)SU(3)_F$	6 反对称	3^* 反对称	6 对称	3^* 反对称
(qq) 自旋	0 反对称	1 对称	1 对称	0 反对称
$(qq\bar{q}\bar{q})SU(3)_F$	1+8+27	1+8	1+8	1+8+27
$(qq\bar{q}\bar{q})J^{PC}(L=0)$	0^{++}	0^{++}　1^{+-}　2^{++}	0^{++}　1^{+-}　2^{++}	0^{-+}
$(qq\bar{q}\bar{q})J^{PC}(L\geqslant 1)$	由表 7.4 给出			

双夸克内部轨道角动量不为零时的对称性可以类似地进行讨论，只是要复杂一些．

重子偶素可以属于味 $SU(3)$ 群的表示 **27**，因此如果发现了同位旋大于 1 的重子数为零的强子，则该粒子不可能是介子或胶球．只能是重子偶素．

6．　混杂子的对称性

由正反夸克和胶子作为价粒子构成的强子称为混杂子，最简

单的混杂子有一对正反夸克和一个胶子作为价粒子．这种混杂子的味对称性和介子的完全相同，它的自旋宇称是相当于在介子的自旋宇称基础上加上胶子的自旋宇称 $J^P=1^-$，再加上相对轨道角动量对自旋宇称的合贡献．由于胶子的 C 变换相因子为负，这个混杂子的 C 宇称由于增加了胶子而和相应的介子相反．混杂子的对称性质都可以如上地在介子对称性的基础上给出．值得注意的是，混杂子的基态量子数和轨道角动量 $L=1$ 介子的量子数完全相同．

第八章　等效相互作用分析

§8.1　$SU(N)$群表示的矩阵描述

设有$SU(N)$群的N维基本表示ϕ，它在群变换下按

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha^i I_i}\phi$$

变换，$e^{i\alpha^i I_i}$是群元素所对应的矩阵．注意这里I_i并不是抽象的生成元，而是生成元在基本表示中的表示矩阵．这里所以不用一般生成元的表示矩阵符号L_i来代表而仍用群生成元的符号I_i来代表，是因为$SU(N)$群如果作为一个矩阵群，则其生成元应表现为$N\times N$矩阵的形式，实际上就是基本表示中生成元的表示矩阵．所以我们用I_i既代表矩阵群中生成元本身，又代表它的基本表示中生成元的表示矩阵，这并不会引起含混，同时却能体现出基本表示和其它表示的不同．

取ϕ的厄米共轭ϕ^+，它构成基本表示$\mathbf{N}$的共轭表示$\mathbf{N}^*$，由于$I_i=I_i^+$是厄米矩阵，α^i是实参数，ϕ^+按

$$\phi^+ \longrightarrow \phi^+ e^{-i\alpha^i I_i}$$

变换．我们用$\mathbf{N}$代表N维表示，$\mathbf{N}^*$代表$\mathbf{N}$的共轭表示，这是一种已经普遍通行的简化记号，一般情况下也不会引起误解．只是在$SU(N)$群有两个n维表示，并且它们又不是互为共轭的关系时，要注意加以区分，通常分别记作$\mathbf{n}$和$\mathbf{n}'$，它们的共轭表示记作$\mathbf{n}^*$和$\mathbf{n}'^*$．

现在我们考虑ϕ的复共轭ϕ^*，它的变换行为是

$$\phi^* \longrightarrow e^{-i\alpha^i I_i^*}\phi^* = e^{i\alpha^i I_i^{(-)}}\phi^*$$

其中 $I_i^{(-)}=-I_i^*$ 是前面介绍 helicity 混合表象时 $e=-1$ 的情形．比较 ϕ^+ 和 ϕ^*，它们之间只差一个转置，一个是行向量，一个是列向量，它们是一一对应的．由于转置关系只是写法形式的不同，表成分量形式是完全相同的，因此 ϕ^* 也应该是 N^* 表示．换言之，对一个表示取复共轭就得它的共轭表示，而取厄米共轭就得到行向量形式的共轭表示．对于基本表示 N，其共轭表示 N^* 的两种形式．ϕ^+ 和 ϕ^*，其变换形式分别如前所述．

同样地，基础表示 N 本身也可以有行向量形式，即取转置 $\tilde{\phi}$，其变换行为是

$$\tilde{\phi}\longrightarrow\tilde{\phi}e^{i\alpha^i\tilde{I}_i}=\tilde{\phi}e^{-i\alpha^iI_i^{(-)}}.$$

总结以上讨论得到的结果是：基本表示 N 和它的共轭表示 N^* 都既可以用行向量表示，也可以用列向量表示，只不过用行向量表示时，群元素作用是体现于用相应的群元素表示矩阵从右边去乘它们的变换行为，如下表所示．

表　示	列　向　量	行　向　量
N　$D(1,0,\cdots,0)$	$\phi\to e^{i\alpha^iI_i}\phi$	$\tilde{\phi}\to\tilde{\phi}e^{-i\alpha^iI_i^{(-)}}$
N^*　$D(0,0,\cdots,1)$	$\phi^*\to e^{i\alpha^iI_i^{(-)}}\phi^*$	$\phi^+\to\phi^+e^{-i\alpha^iI_i}$

从这表中可以看出有明显的规则：用列向量形式时，指数上一律是 $+i$，用行向量形式时，指数上一律是 $-i$；当生成元表示取 I_i 时，列向量是 N 表示，行向量是 N^* 表示；当 I_i 换成 $I_i^{(-)}$ 时，表示换为与之共轭的表示．

既然基本表示 N 和 N^* 都可以通过 N 维空间行向量或列向量的形式表述出来，有关的运算都能通过 N 维空间的矩阵乘法来进行，就需要考虑一个问题：除此之外还有哪些表示的变换性质也可以通过 N 维空间的矩阵形式表示出来？因为回答了这个问题之后，就提供出这么一个可能性：在只直接涉及这些表示的一些计算和

讨论中，可以用具体的矩阵乘法来代替张量计算，特别是可以用矩阵乘法代替 C-G 系数的计算，从而使计算和讨论都大大简化，并且变得比较直观.

一个表示可以通过N维矩阵的形式表示出来的必要条件是通过张量形式表述时它只有两个指标（无论是上指标还是下指标）. 显然，这样的表示应该是由两个基本表示直乘出来的表示，满足这要求的不可约表示如图 8.1 所示.

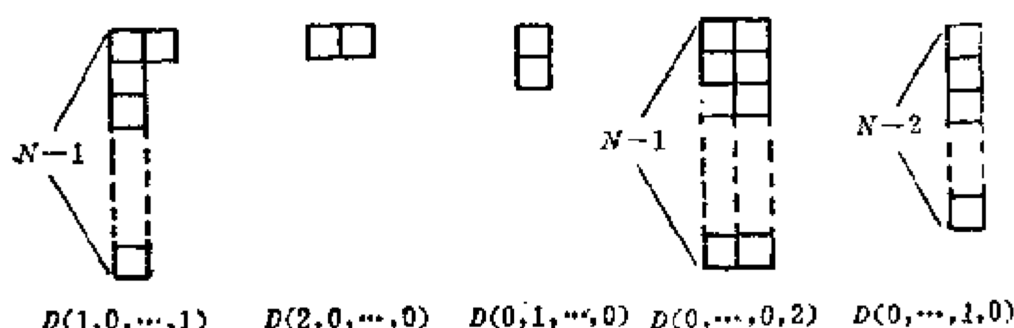


图 8.1　由两个基本表示直乘出来的表示

按照定义，正规表示的维数和生成元的个数相等. 这样正规表示的矩阵就应是m维矩阵，这对于$SU(N)$群来说就是N^2-1维矩阵. 这显然是一个维数相当大的矩阵，但是正规表示的维数既然和生成元的个数相等，而$SU(N)$作为矩阵群其生成元矩阵等同于基础表示中生成元的表示矩阵，就可以通过这个对应关系将正规表示表为基础表示中的一个矩阵.

$SU(N)$群的正规表示是$D(1,0,\cdots,0,1)$，表示维数为$m=N^2-1$，它可以表为一个$N\times N$矩阵，利用幺模幺正条件定出其独立分量为N^2-1个，体现为这个矩阵是厄米矩阵并且阵迹为零.

令ϕ代表$D(1,0,\cdots,0,1)$表示，其分量为φ^i，$i=1,2,\cdots,N^2-1$，则其矩阵形式为$\Phi=\varphi^i I_i$，其中φ^i为实数. 将正规表示通过这样形式表述出来后，它在群变换下的性质可以不通过$(N^2-1)\times(N^2-1)$矩阵表述出来，而直接在N维空间表为.

$$\Phi \longrightarrow e^{i\alpha^i T_i}\Phi e^{-i\alpha^i T_i},$$

这是正规表示的特点. 这个变换式的含意是: 正规表示既然用矩阵表示,相当于基本表示和它的共轭表示拼成的,反映为正规表示的各列按基本表示 $D(1,0,\cdots,0)$ 变换, 同时正规表示各行又按基本表示 $D(0,0,\cdots,1)$ 变换. 然而

$$D(1,0,\cdots,0,0)\times D(0,0,\cdots,0,1)$$
$$=D(1,0,\cdots,0,1)+D(0,0,\cdots,0,0),$$

要把直乘分解中一维表示 $D(0,\cdots,0)$ 扣除是靠阵迹为零条件, 这对群变换的上述表述没有任何影响.

引进了基本表示 ϕ_i 和正规表示 Φ_k, 则可以写出 $SU(N)$ 群变换下的不变量(即标量)如下,例如

$$\phi_i^+\phi_j=\mathrm{Tr}(\phi_j\phi_i^+),$$
$$\phi_i^+\Phi\phi_j=\mathrm{Tr}(\phi_j\phi_i^+\Phi),$$
$$\phi_i^+\Phi_k\Phi_l\phi_j,$$
$$\mathrm{Tr}\Phi_k\Phi_l,$$

其中下标是为区别不同的表示. 例如 Φ_k 和 Φ_l 表示两个场量都按正规表示来变换,但它们毕竟是不同的场, 这时加下标予以区分. 由此可见,要构成群变换下的不变量,可以按通常矩阵乘法乘成标量,或者乘成矩阵形式后再取阵迹.

这种作法的优点可以由下例明显看出来. 以 $\phi_i^+\Phi\phi_j$ 不变量为例,按通常作法,就需要逐个求出 ϕ_j 的每一个分量和 Φ 的每一个分量耦合成 ϕ_i 中相应分量的 C-G 系数. 一般情形下这些 C-G 系数要靠查表或运用群论方法经过计算逐个求出. 然而运用矩阵形式,这些 C-G 系数就可以通过矩阵乘法统一地一次给出,既不需要查表也不需要记忆除矩阵乘法规则外特殊的运算规则, 显然这样的方法使处理问题大大简化.

既然这种方法在许多计算中非常有利, 自然想到的是如何将

这个方法推广用于其它可以用矩阵形式表述的表示．考察 $D(2,0,\cdots,0,0)$ 表示和 $D(0,1,0,\cdots,0)$ 表示，它们杨图和表示的维数如图 8.2 所示．表成 $N\times N$ 矩阵时，前者为对称矩阵，后者为反对称

$D(2,0,\cdots,0)$ $\frac{1}{2}N(N+1)$维　　　$D(0,1,\cdots,0)$ $\frac{1}{2}N(N-1)$维

图 8.2　基本表示对称和反对称化给出的表示

矩阵．表成矩阵形式时，可以利用基本表示中的生成元矩阵，考虑

$$\frac{1}{2}(I_i+\tilde{I}_i),\quad \frac{i}{2}(I_i-\tilde{I}_i),$$

前者是对称矩阵，并且在 $i=1,\cdots,N^2-1$时，实际上只有$\frac{1}{2}N(N+1)$ 个不为零，乘上相应的 $D(2,0,\cdots,0)$ 表示的分量，就得 $D(2,0,\cdots,0,0)$ 表示的矩阵形式；后者是反对称矩阵，在 i 取各种可能值时，实际上只有$\frac{1}{2}N(N-1)$个不为零，乘上 $D(0,1,\cdots,0)$ 的相应分量，就得 $D(0,1,\cdots,0)$ 表示的矩阵形式．

为了要得到正确构成不变量的规则，需要给出它们的变换规则．如上所述，$D(2,0,\cdots,0)$ 表示和 $D(0,1,\cdots,0)$ 表示都是由两个方格的杨图描写，因此从张量形式来说，两个指标都是下指标，即都按 $D(1,0,\cdots,0)$ 表示同样规则变换．正因为这样，尽管它们写成 $N\times N$ 矩阵形式，但变换规律一定要和正规表示不同．正规表示的各列按 $D(1,0,\cdots,0)$ 变换，各行按 $D(0,0,\cdots,1)$ 变换，而现在这两个表示的各行和各列都要按 $D(1,0,\cdots,0)$ 表示变换．如果我们用 $\Phi^{(s)}$ 和 $\Phi^{(a)}$ 分别代表 $D(2,0,\cdots,0)$ 和 $D(0,1,0,\cdots,0)$ 的矩阵形式，则它们的变换规则为

$$\Phi^{(s,a)}\longrightarrow e^{i\alpha_i I_i}\Phi^{(s,a)}e^{-i\alpha_i I_i^{(\sim)}}.$$

同样地，表示 $D(0,\cdots,0,2)$ 和表示 $D(0,\cdots,1,0)$ 分别是 $D(2,0,\cdots,0)$ 和 $D(0,1,0,\cdots,0)$ 的共轭表示，也可以用矩阵形式表示。它们可以由 $\Phi^{(s)}$ 和 $\Phi^{(a)}$ 取厄米共轭给出，其变换规则为

$$\Phi^{(s,a)+} \longrightarrow e^{i\alpha^i I_i^{(-)}} \Phi^{(s,a)+} e^{-i\alpha^i I_i}.$$

现在来看如何来构成不变量。用矩阵形式写出不变量来的要求是：要用普遍矩阵乘法和求阵迹的形式表成标量，在作群变换时，所有的变换因子都可以消掉。考虑到变换因子有两种类型，即通过 I_i 表出的和通过 $I_i^{(-)}$ 表出的，在变换因子相消时，必须是同类的才有可能相消。考虑到变换因子从左边作用时总是

$$e^{i\alpha^i I_i} \quad 或 \quad e^{i\alpha^i I_i^{(-)}}$$

形式，而从右边作用时总是

$$e^{-i\alpha^i I_i} \quad 或 \quad e^{-i\alpha^i I_i^{(-)}}$$

形式，因此重要的是对矩阵要注明其行列变换类型。用＋和－分别代表 I_i 型和 $I_i^{(-)}$ 型变换规则，并且为简单起见，则可略去正号＋，型号可以注在矩阵下面。按这个规定，可如下标记：

$D(1,0,\cdots,0,0)\ \phi, \tilde{\phi}_-$ $\quad D(0,\cdots,0,1)\ \phi^+, {}_-\phi^*$

$D(1,0,\cdots,0,1)\ \Phi$

$D(2,0,\cdots,0,0)\ \Phi^{(s)}_-$ $\quad D(0,\cdots,0,2)\ {}_-\Phi^{(s)+}$

$D(0,1,0,\cdots,0)\ \Phi^{(a)}_-$ $\quad D(0,\cdots,1,0)\ {}_-\Phi^{(a)+}$

采用这种标记之后，要构成不变量时，只要注意矩阵乘法相接处总是同号相接，则群变换时自动保证变换因子全部消掉，例如

$\mathrm{Tr}(\Phi^{(s)}_{-\,-}\Phi^{(a)+}\Phi)$ 能构成不变量；

$\mathrm{Tr}(\Phi^{(s)}_-\Phi^{(a)}_-\Phi)$，$\mathrm{Tr}({}_-\Phi^{(s)+}\Phi^{(a)}_-\Phi)$ 不能构成不变量。

根据这些规则，在只涉及这 7 种表示时，常可以通过矩阵乘法的形式直接给出不变量。在简单的问题中，常常能以矩阵乘法的形式给出全部不变量。在这样作时，所涉及的全部 C-G 系数都能

通过矩阵乘法自动给出，不需要额外查表，这是矩阵表述的最明显的优点.

但是要注意，用矩阵乘法方式得到的 C-G 系数和直接查表得到的 C-G 系数常差一个正负号，这是由于两种作法的相角规定不同所引起的，对物理结果不会有影响. 无论采用哪一种作法就要作到底，不要在作一个问题过程中，交替混用两种作法，因为那样作会带来不必要的混乱.

矩阵描述尽管可以使计算大大简化，但它有局限性，主要表现在它只能适用于这 7 种非显然表示和一维表示之间的某些问题. 对于涉及其它表示的问题的处理，还得用其它方法.

在 $SU(N)$ 不变的理论中，存在 N^2-1 个守恒荷，即 $SU(N)$ 群的 N^2-1 个生成元. 其中可同时测量的共 $l=N-1$ 个，即 I_{k^2-1}，$k=2, \cdots, N$. 一般说来，物理上有意义需要考虑的可加量子数总可表为这 $N-1$ 个生成元的线性组合，需要解决的是，当某表示可以用矩阵形式表示时，它的各分量的量子数如何确定. 为此我们只需研究一个典型的对角化生成元 I 所代表的量子数的取值.

令 I 的对角元素为 $\mu_1, \cdots, \mu_N$，非对角元素为零，无迹条件要求

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k = 0,$$

I 在各表示上取值如下确定:

$D(1,0,\cdots,0)$ 表示 ϕ，由 $I\phi$ 给出，即 ϕ 的分量 φ_k 的量子数为 μ_k；如果以 $\tilde{\phi}$ 形式表述，则由 $\tilde{\phi}_- I$ 给出，结果与上面相同；

$D(0,\cdots,0,1)$ 表示 ϕ^+，由 $-\phi^+ I$ 给出，即 ϕ^+ 的分量 φ^{k*} 的量子数为 $-\mu_k$；如果以 $_-\phi^*$ 形式表述，则由 $-I_-\phi^*$ 给出，结果与上面相同；

$D(1,0,\cdots,0,1)$ 表示 Φ，由

$$I\Phi - \Phi I$$

决定，即Φ的分量ϕ_j^k的量子数为$\mu_j - \mu_k$.

$D(2,0,\cdots,0)$表示$\Phi_-^{(s)}$(或$D(0,1,\cdots,0)$表示$\Phi_-^{(a)}$)由

$$I\Phi_-^{(s)} + \Phi_-^{(s)} I$$

决定，即$\Phi_-^{(s)}$的分量ϕ_{jk}的量子数为$\mu_j + \mu_k$. 对$\Phi_-^{(a)}$结果完全一样，只要把上式中$\Phi_-^{(s)}$换成$\Phi_-^{(a)}$.

$D(0,\cdots,0,2)$表示$\Phi_-^{(s)*}$(或$D(0,\cdots,1,0)$表示${}_-\Phi^{(a)*}$由

$$-I{}_-\Phi^{(s)*} - {}_-\Phi^{(s)*} I$$

决定，即${}_-\Phi^{(s)*}$的分量ϕ^{*jk}的量子数为$-(\mu_j + \mu_k)$. 对${}_-\Phi^{(a)*}$结果完全一样，只要把上式中${}_-\Phi^{(s)*}$换成${}_-\Phi^{(a)*}$.

上述结果可以概括成：$N\times N$矩阵表示的第j行k列分量的量子数为$\mu_j - \mu_k$，如果矩阵的变换性质上行或列指标属(—)类，则相应的在本征值中的贡献再乘(—1). 对基本表示，则根据其是行向量还是列向量决定去掉μ_j还是μ_k，并且同样也要注意指标是否属(—)类(凡是(—)类再变号).

§8.2 $SU(3)$群表示的矩阵描述

一般$SU(N)$群表示的矩阵描述对于$SU(3)$群当然都适用. 但$SU(3)$群还有一些特点，主要是3维表示$D(1,0)$和$D(0,1)$分别都既可以表示为矢量形式，也可以表示为矩阵形式. 由于$SU(3)$群用得较多，在这里结合夸克模型中的应用作一些具体介绍.

如果在夸克模型中只考虑3种味的夸克u，d和s，则可以用$SU(3)$群来描写，这3种夸克构成基本表示$\mathbf{3} = D(1,0)$，它们的反粒子构成相应的共轭表示$\mathbf{3}^* = D(0,1)$. 考虑由一对正反夸克构成的介子(为确定明确起见，暂只通过$J^{PC} = 0^{-+}$的赝标介子讨论). 它们构成的群表示为

$$D(1,0)\times D(0,1) = D(1,1) + D(0,0),$$

即

$$\mathbf{3}\times\mathbf{3}^*=\mathbf{8}+\mathbf{1}.$$

赝标介子的矩阵描述可表为

$$\mathbf{8}\sim\begin{bmatrix}\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+\\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta}{\sqrt{6}} & -K^0\\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{1}\sim\frac{\eta'}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

但是由基本表示相乘得

$$\mathbf{3}\times\mathbf{3}^*\sim\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix}(\bar{u}\bar{d}s)=\begin{pmatrix}u\bar{u}&u\bar{d}&u\bar{s}\\d\bar{u}&d\bar{d}&d\bar{s}\\s\bar{u}&s\bar{d}&s\bar{s}\end{pmatrix},$$

代入上式比较相应分量得

$$\pi^+=u\bar{d},\ \pi^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d}),\ \pi^-=d\bar{u},$$

$$K^+=u\bar{s},\ K^0=d\bar{s},\ \bar{K}^0=s\bar{d},\ K^-=s\bar{u},$$

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}),\ \eta'=\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}).$$

这样利用矩阵乘法直接给出各介子态通过正反夸克态表示的形式.

现在再看由一对夸克组成的双夸克系统，它们构成的群表示为

$$D(1,0)\times D(1,0)=D(2,0)+D(0,1),$$

即

$$\mathbf{3}\times\mathbf{3}=\mathbf{6}+\mathbf{3}^*.$$

用矩阵表示时，为了避免误解和含混，把夸克符号下加上下标，这下标代表区分夸克态的参数(例如相当于 u_1 代表 $u(x_1)$). 上式乘法可得

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ s_1 \end{pmatrix}(u_2 d_2 s_2) = \begin{pmatrix} u_1u_2 & u_1d_2 & u_1s_2 \\ d_1u_2 & d_1d_2 & d_1s_2 \\ s_1u_2 & s_1d_2 & s_1s_2 \end{pmatrix},$$

这个矩阵是一个可约表示，要把它分解成不可约表示的直和 $\mathbf{6}+\mathbf{3}^*$，则需要对之进行对称和反对称化处理，这样上式可写作

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2u_1u_2 & u_1d_2+u_2d_1 & u_1s_2+u_2s_1 \\ d_1u_2+d_2u_1 & 2d_1d_2 & d_1s_2+d_2s_1 \\ s_1u_2+s_2u_1 & s_1d_2+s_2d_1 & 2s_1s_2 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_1d_2-u_2d_1 & u_1s_2-u_2s_1 \\ d_1u_2-d_2u_1 & 0 & d_1s_2-d_2s_1 \\ s_1u_2-s_2u_1 & s_1d_2-s_2d_1 & 0 \end{pmatrix},$$

前者为表示 $D(2,0)=\mathbf{6}$，后者为表示 $D(0,1)=\mathbf{3}^*$.

现在再考虑 3 个夸克组成的系统，它们组成的群表示为

$$\begin{aligned} & D(1,0)\times D(1,0)\times D(1,0) \\ & = D(1,0)\times[D(2,0)+D(0,1)] \\ & = D(3,0)+D(1,1)+D(1,1)+D(0,0), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{3}\times\mathbf{3}\times\mathbf{3} & = \mathbf{3}\times(\mathbf{6}+\mathbf{3}^*) \\ & = \mathbf{10}+\mathbf{8}+\mathbf{8}+\mathbf{1}. \end{aligned}$$

这些表示中，10 维表示 $D(3,0)$ 有 3 个指标，不能简单地通过矩阵描写，但另外的几个则都可通过矩阵描写. 为了能正确地进行矩阵运算，必须注意 $\mathbf{6}$ 和 $\mathbf{3}^*$ 的矩阵描述都是$(+,-)$型矩阵，而 $\mathbf{3}$ 的列向量描写是$(+)$型，$\mathbf{3}$ 的行向量描写是$(-)$型，都不能和 $\mathbf{6}$ 或 $\mathbf{3}^*$ 的矩阵描述相乘. 但 $\mathbf{3}$ 的反对称矩阵描述则是$(-,+)$型，它可以和

6 或 3^* 的矩阵相乘，得出结果分别为

$$
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2u_1u_2 & u_1d_2+d_1u_2 & u_1s_2+s_1u_2 \\ d_1u_2+u_1d_2 & 2d_1d_2 & d_1s_2+s_1d_2 \\ s_1u_2+u_1s_2 & s_1d_2+d_1s_2 & 2s_1s_2 \end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix} 0 & s_3 & -d_3 \\ -s_3 & 0 & u_3 \\ d_3 & -u_3 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -u_1d_2s_3-d_1u_2s_3+u_1s_2d_3+s_1u_2d_3 & 2u_1u_2s_3-u_1s_2u_3-s_1u_2u_3 & -2u_1u_2d_3+u_1d_2u_3+d_1u_2u_3 \\ -2d_1d_2s_3+d_1s_2d_3+s_1d_2d_3 & d_1u_2s_2+u_1d_2s_3-d_1s_2u_3-s_1d_2u_3 & 2d_1d_2u_3-d_1u_2d_3-u_1d_2d_3 \\ 2s_1s_2d_3-s_1d_2s_3-d_1s_2s_3 & -2s_1s_2u_3+s_1u_2s_3+u_1s_2s_3 & -s_1u_2d_3-u_1s_2d_3+s_1d_2u_3+d_1s_2u_3 \end{pmatrix},
$$

$$
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_1d_2-d_1u_2 & u_1s_2-s_1u_2 \\ d_1u_2-u_1d_2 & 0 & d_1s_2-s_1d_2 \\ s_1u_2-u_1s_2 & s_1d_2-d_1s_2 & 0 \end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix} 0 & s_3 & -d_3 \\ -s_3 & 0 & u_3 \\ d_3 & -u_3 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -u_1d_2s_3+d_1u_2s_3+u_1s_2d_3-s_1u_2d_3 & -u_1s_2u_3+s_1u_2u_3 & u_1d_2u_3-d_1u_2u_3 \\ d_1s_2d_3-s_1d_2d_3 & d_1u_2s_3-u_1d_2s_3-d_1s_2u_3+s_1d_2u_3 & -d_1u_2d_3+u_1d_2d_3 \\ -s_1d_2s_3+d_1s_2s_3 & s_1u_2s_3-u_1s_2s_3 & -s_1u_2d_3+u_1s_2d_3+s_1d_2u_3-d_1s_2u_3 \end{pmatrix}.
$$

这样得到的矩阵，前者阵迹为零，为纯 $D(1,1)$ 表示. 后者则为 $D(1,1)+D(0,0)$，可以将阵迹与阵迹为零部分分开，就将这两个表示分开了. 然后再将各矩阵归一化，就得到归一化的态矢量表达式. 例如前一个 8 维表示只要把矩阵前的系数 $1/2$ 换为 $1/\sqrt{6}$，而后一个 8 维表示只要把矩阵前的系数 $1/2$ 换为 $1/\sqrt{2}$，归一化就完成了. 虽然不能通过矩阵乘法给出表示 $D(3,0)$，但可以通过 $D(3,0)$ 表示的完全对称性质，或者通过与其它表示中相应的态完全正交的要求写出.

从这个例子可以看出，3 个夸克组成系统的全部态都可以通过矩阵乘法的形式给出，而且这样作时，不需要查任何 C-G 系数表，所有的C-G系数都可以自动通过矩阵乘法给出，这是矩阵表述的主要优点之一.

§8.3 介子场量和极化的描写

1. 对称性对场量描述的要求

在写不变量时，除了要把内部连续对称性反映出来，还要保持其它群下的不变性. 例如，一般的不变量总必须是相对论变换不变的，即在 Lorentz 变换下是不变的，强相互作用和电磁相互作用的正反粒子变换(即 C 变换)不变性和空间反射变换不变性等. 这些变换性质都要在写出的相互作用中体现出来，亦即需要能同时反映场量的自旋和 C 变换性质、P 变换性质的场量描述.

另一方面，在粒子物理中，讲等效相互作用涉及的是初态和末态中实际观察到的粒子. 一般说来，这些粒子是有自旋的. 在讨论跃迁几率时往往要对初态粒子各个可能的自旋态求平均，或要对末态粒子各个可能的自旋态求和，这都归结为对一种粒子所有可能自旋态求和的表达式，这个表达式在场论中又称为极化传

播子.

因此，首先需要给出场量的统一描写，这个描写一方面能体现内部对称性，同时还能体现Lorentz不变性的要求，包括能反映粒子的自旋、C变换和P变换性质．在有了这样的描述之后，对各个场量还应给出相应的极化传播子．在下面我们将主要讨论介子的描写，对于重子可以根据同样的原则加以推广．

2．全对称性描写的基本方法和结果

粒子的C字称存在的必要条件是Majorana粒子，即所有内部变换相加性量子数都为零．对于非Majorana粒子，虽然没有C宇称，但有确定的C变换性质，体现为C变换系数．内部对称性同一表示中诸粒子的C变换系数相同，并且就等于其中Majorana粒子的C宇称．因此，任何介子都有确定的C变换系数．

粒子可以有P宇称，但是严格来说，绝对P宇称存在的必要条件是粒子为Majorana粒子．对于非Majorana粒子，P宇称是相对的，不同的规定下P宇称的取值可以完全不同．在去除表现为P宇称相对性的任意性方面，起重要作用的是在同一内部对称群表示中的诸粒子宇称相同，即P变换与内部对称群对易．

C变换与P变换的不变性在强相互作用和电磁相互作用下是保持的，但在弱相互作用下不再保持．因此对于只直接参与弱相互作用的粒子——中微子，就不能有C宇称和P宇称，然而还是可以有C变换和P变换性质，同一内部对称性表示中各分量的C变换和P变换性质相同．在讨论弱相互作用的等效相互作用时要注意这一点．在下面我们仍主要结合强相互作用与电磁相互作用的情形来讨论．

现在需要的是当介子的J^{PC}性质给定后，给出一种统一的场量描述方法．在过去的文献中，常常采用只描写自旋的办法，例如，对于$J^{PC}=1^{--}, 1^{++}, 1^{+-}$的粒子都用$A_\mu$来描写，对场量的附加

条件为

$$\partial^{\mu}A_{\mu}=0.$$

至于这几种情况C变换和P变换性质的不同，则采用额外的附加规则来解决．虽然这种作法在处理个别问题时可能比较简单，但在普遍讨论时则往往带来不必要的麻烦，而且容易疏漏．因此现在各种J^{PC}的粒子发现日益增多的情形下，需要给出一种统一的场量描述方法．下面引人的全对称性描写就是这种描述方法．

介子场量的全对称性描写可以根据下述原则给出：

(1) 介子的场量可以有若干个 Lorentz 指标(上指标或下指标，为确定起见，下面讨论中都表为下指标)．对于这些 Lorentz 指标可以引人三类附加条件：对称性条件(对称或反对称)；阵迹条件和 Lorentz 条件．这些附加条件的引人，把独立场量分量的个数减少到$2J-1$个，描写自旋为J的场．

(2) 如果介子场量有k个 Lorentz 指标，则该介子场量的C变换系数(即其中 Majorana 中性分量的C宇称)$C'=(-1)^{k}$，即每一个 Lorentz 指标对C变换系数贡献一个负号．

(3) 介子场量的内禀P宇称可以如下地简单确定：在动量表象中写出质心系中独立的场量(它表现为极化张量)，每一个空间指标对P宇称贡献一个负号．

根据上述规则就可以把各种场量描写的J^{PC}量子数完全确定下来．例如考虑场量$\phi_{\mu\nu}$，满足的附加条件为

$$\phi_{\mu\nu}=\phi_{\nu\mu},$$

$$g^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}=0,$$

$$\partial^{\mu}\phi_{\mu\nu}=0.$$

这个场量本有 16 个分量，对称条件限制后剩 10 个；无迹条件限制掉一个，还剩 9 个；Lorentz 条件又限制掉 4 个，最后剩 5 个，它描写的是$J=2$的场量．由于$\phi_{\mu\nu}$是 2 个指标，$C'=+$．在动量表象质

心系中给出场量时，由于 Lorentz 条件表现为

$$p^0 e_{0\mu} = m e_{0\mu} = 0,$$

只保留下来两个指标都不是时间指标的分量，因此 $P' = +$. 这样这个场量代表的是 $J^{PC} = 2^{++}$ 的介子.

按照上面的规则和要求，给出一些量子数的场量描述如表 8.1 所示.

表 8.1 一些量子数的场量描述

J^{PC}	场　量	附　加　条　件
0^{++}	ϕ	
0^{-+}	$\phi_{\mu\nu\lambda\sigma}$	全反对称
0^{+-}	ϕ_{μ}	$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_{\mu}\phi_{\nu}=0$
0^{--}	$\phi_{\mu\nu\lambda}$	全反对称，$\partial^{\mu}\phi_{\mu\nu\lambda}=0$
1^{++}	$\phi_{\mu\nu}$	全反对称，$\partial^{\mu}\phi_{\mu\nu}=0$
1^{-+}	$\phi_{\mu\nu}$	全反对称，$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_{\lambda}\phi_{\mu\nu}=0$
1^{+-}	$\phi_{\mu\nu\lambda}$	全反对称，$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_{\sigma}\phi_{\mu\nu\lambda}=0$
1^{--}	ϕ_{μ}	$\partial^{\mu}\phi_{\mu}=0$
2^{++}	$\phi_{\mu\nu}$	全对称，$g^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}=0$，$\partial^{\mu}\phi_{\mu\nu}=0$
3^{--}	$\phi_{\mu\nu\lambda}$	全对称，$g^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu\lambda}=0$，$\partial^{\mu}\phi_{\mu\nu\lambda}=0$

这种全对称性描写的优点在于：既然 C 变换性质和 P 变换性质的描写都和自旋 J 统一地通过场量的 Lorentz 指标体现出来，在讨论任一过程的等效相互作用而需要写出不变量时，只要写成 Lorentz 标量，则 Lorentz 不变性、C 变换不变性和 P 变换不变性都自然地同时能够得到保证.

场量的全对称描写可以避免过去一些作法带来的不必要的麻烦和混乱.

3. 极化传播子

在动量表象中，场量体现为极化张量，它有 $2J+1$ 个独立的极化分量. 在实际计算时，经常需要计算给定 J^{PC} 的粒子的极化传

播子

$$\Delta^{JPC}_{\mu\nu\cdots,\mu'\nu'\cdots}=\sum_{i=1}^{J+1}e^{(i)}_{\mu\nu\cdots}e^{(i)}_{\mu'\nu'\cdots}.$$

在等效相互作用分析时，涉及的介子都是在初态或末态中，因此计算中涉及极化传播子都是在质壳上的值，这样就避免了向质壳外延拓时遇到的不必要的复杂性。

上面给出的极化传播子的定义是用无上标度规写出的，如用有上标形式写出，则为

$$\Delta^{JPC\,\mu'\nu'\cdots}_{\mu\nu\cdots}=\sum_{i=1}^{2J+1}e^{(i)}_{\mu\nu\cdots}e^{(i)\mu'\nu'\cdots},$$

这两种表述是等价的。在下面的讨论中，我们以无上标度规的形式进行讨论，所得结果不难翻写到有上标形式中去，但在使用时则不应忽视度规的差别。

极化传播子的表达式完全由场量的描写决定，当然包括所有附加条件都要考虑。令介子的质量为m，4 维动量为k_μ，质壳条件为

$$k^2+m^2=0,$$

引入符号

$$\Delta_{\mu\mu'}=\delta_{\mu\mu'}+\frac{k_\mu k_{\mu'}}{m^2}$$

以$J^{PC}=2^{++}$介子为例来看极化传播子是怎样导出的。按定义

$$\Delta^{2^{++}}_{\mu\nu,\mu'\nu'}=\sum_{i=1}^{5}e^{(i)}_{\mu\nu}e^{(i)}_{\mu'\nu'}.$$

为简单起见，下面暂略去极化传播子中的记号2^{++}。因$\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}$共有 4 个 Lorentz指标，而讨论的介子能提供的有 Lorentz 指标的量只有极化张量$e^{(i)}_{\mu\nu}$和4 维动量k_μ。但是极化张量是场量在动量表象中的表现，是和粒子的产生和消灭直接联系的，实际

上极化传播子就是通过极化张量定义并已求和掉了. 因此 $\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}$ 中的Lorentz 指标只能由 k_μ 或 $\delta_{\mu\nu}$ 提供,亦即$\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}$ 总能写成 $\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu'\nu'}$, $\delta_{\mu\nu}k_{\mu'}k_{\nu'}$, $k_\mu k_\nu k_{\mu'}k_{\nu'}$ 这三种类型项的线性组合. 事实上, 由于极化传播子的每一个指标都满足 Lorentz条件

$$k_\mu \Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}=0,$$

要求在其中 μ 指标总以$\Delta_{\mu\nu}$形式出现,同时考虑到对 4 个指标都有此结论,因此 $\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}$ 应由形如 $\Delta_{\mu\nu}$,$\Delta_{\mu'\nu'}$ 的项的线性组合构成. 再利用

$$\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}=\Delta_{\mu'\nu',\mu\nu} \quad \text{极化传播子对称条件}$$

$$\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}=\Delta_{\nu\mu,\mu'\nu'} \quad \text{极化张量对称条件}$$

的限制,极化传播子可表为

$$\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}=A(\Delta_{\mu\mu'}\Delta_{\nu\nu'}+\Delta_{\mu\nu'}\Delta_{\nu\mu'})+B\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\mu'\nu'},$$

再利用无迹条件

$$\Delta_{\mu\mu,\mu'\nu'}=0$$

和

$$\Delta_{\mu\mu}=0, \quad \Delta_{\mu\mu'}\Delta_{\mu\nu'}=\Delta_{\mu'\nu'}$$

得到

$$2A+3B=0.$$

再利用归一条件

$$\Delta_{\mu\nu,\mu\nu}=5,$$

得到 $12A+3B=5$, 由此定出 $A=1/2, B=-1/3$. 这样 $\Delta_{\mu\nu,\mu'\nu'}$ 的形式完全确定下来.

利用同样的方法,定出上列给出各场量的极化传播子为

$$\Delta^{0^{++}}=1,$$

$$\Delta^{0^{-+}}_{\mu\nu\lambda\sigma,\mu'\nu'\lambda'\sigma'}=\frac{1}{24}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'},$$

$$\Delta^{0^{+-}}_{\mu,\mu'}=-\frac{k_\mu k_{\mu'}}{m^2},$$

$$\Delta^{0--}_{\mu\nu\lambda,\mu'\nu'\lambda'}=-\frac{1}{6m^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}k_\alpha\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\alpha'}k_{\alpha'},$$

$$\Delta^{1++}_{\mu\nu,\mu'\nu'}=\frac{1}{2}(\Delta_{\mu\mu'}\Delta_{\nu\nu'}-\Delta_{\mu\nu'}\Delta_{\nu\mu'})$$

$$=-\frac{1}{2m^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma}k_\lambda k_{\lambda'},$$

$$\Delta^{1-+}_{\mu\nu,\mu'\nu'}=-\frac{1}{2m^2}(\delta_{\mu\mu'}k_\nu k_{\nu'}+\delta_{\nu\nu'}k_\mu k_{\mu'}$$

$$-\delta_{\mu\nu'}k_\nu k_{\mu'}-\delta_{\nu\mu'}k_\mu k_{\nu'})$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma}\Delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\Delta^{1+-}_{\mu\nu\lambda,\mu'\nu'\lambda'}=\frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'}\Delta_{\sigma\sigma'},$$

$$\Delta^{1--}_{\mu,\mu'}=\Delta_{\mu\mu'},$$

$$\Delta^{2++}_{\mu\nu,\mu'\nu'}=\frac{1}{2}\left(\Delta_{\mu\mu'}\Delta_{\nu\nu'}+\Delta_{\mu\nu'}\Delta_{\nu\mu'}-\frac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\mu'\nu'}\right),$$

$$\Delta^{3--}_{\mu\nu\lambda,\mu'\nu'\lambda'}=\frac{1}{6}(\Delta_{\mu\mu'}\Delta_{\nu\nu'}\Delta_{\lambda\lambda'}+\Delta_{\mu\nu'}\Delta_{\nu\lambda'}\Delta_{\lambda\mu'}$$

$$+\Delta_{\mu\lambda'}\Delta_{\nu\mu'}\Delta_{\lambda\nu'}+\Delta_{\mu\nu'}\Delta_{\nu\mu'}\Delta_{\lambda\lambda'}$$

$$+\Delta_{\mu\lambda'}\Delta_{\nu\nu'}\Delta_{\lambda\mu'}+\Delta_{\mu\mu'}\Delta_{\nu\lambda'}\Delta_{\lambda\nu'}$$

$$-\frac{2}{5}(\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\mu'\nu'}\Delta_{\lambda\lambda'}+\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\nu'\lambda'}\Delta_{\lambda\mu'}$$

$$+\Delta_{\mu\nu}\Delta_{\lambda'\mu'}\Delta_{\lambda\nu'}+\Delta_{\mu\lambda}\Delta_{\mu'\nu'}\Delta_{\nu\lambda'}$$

$$+\Delta_{\mu\lambda}\Delta_{\nu'\lambda'}\Delta_{\nu\mu'}+\Delta_{\mu\lambda}\Delta_{\lambda'\mu'}\Delta_{\nu\nu'}$$

$$+\Delta_{\nu\lambda}\Delta_{\mu'\nu'}\Delta_{\mu\lambda'}+\Delta_{\nu\lambda}\Delta_{\nu'\lambda'}\Delta_{\mu\mu'}$$

$$+\Delta_{\nu\lambda}\Delta_{\lambda'\mu'}\Delta_{\mu\nu'})].$$

§ 8.4 等效相互作用的一般形式

1. 等效相互作用的引入

在场论中，粒子反应过程是通过 S 矩阵来描写的. 对于弱耦

合的情形，通常用微扰论来处理，S 矩阵的最低级微扰项为

$$\langle f|S|i\rangle^{(1)}=-i\langle f|H_{in}|i\rangle,$$

但在强耦合时，微扰论的高级项并不比低级项小，原则上应该把各级贡献都加起来，一起去和实验比较. 这时由于微扰论不适用了，即使给出原始相互作用的形式，也很难算出 S 矩阵来和实验比较，反之，既使实验提供了 S 矩阵的一些性质，也很难回过去推测原始相互作用的形式和性质.

然而在这种情况下，原始相互作用的形式并不是最重要的，重要的是利用相互作用所满足的对称性要求，定出具体物理过程 S 矩阵的普遍形式. 通常把 S 矩阵元形式上看作是某种等效相互作用的一级微扰项，即

$$\langle f|S|i\rangle=-i\langle f|H_{eff}|i\rangle.$$

注意，这里 S 矩阵元是把所有各级贡献都考虑进去了，然而等式右边则以一级微扰的形式出现. 由此可见，等效相互作用按定义只需算一级项，即包括所有的贡献，这是等效相互作用和通常相互作用项的差别.

实际上，等效相互作用是对 S 矩阵元的另一种描述语言，只不过由于它大量借助微扰论的语言，讨论起来比较方便和直观. 由于等效相互作用是 S 矩阵元的另一种描述语言，S 矩阵并没有厄米性，因此等效相互作用也可以不表现出通常相互作用项的厄米性.

考虑一个基本粒子反应过程，即

$$A_1+A_2+\cdots\longrightarrow B_1+B_2+\cdots,$$

如果引入等效相互作用 H_{eff} 来描写，则其中应包含 $A_1,A_2,\cdots$ 的场量，以提供 $A_1,A_2,\cdots$ 的消灭算符；同时还应包含 $B_1,B_2,\cdots$ 的共轭场量，以提供 $B_1,B_2,\cdots$ 的产生算符，这些场量所带有的 Lorentz 指标必须全部收缩掉，以保证 H_{eff} 是Lorentz标量. 在收缩掉场量

的 Lorentz 指标时，可以引入对场量的时空微商，这相当于引入相应粒子的 4 维动量算符. H_{eff} 必须在 C 变换和 P 变换下不变，同时还必须在内部对称性下不变，以保证满足一切相应的守恒定律并且提供所需要的场量. 下面我们介绍确定等效相互作用形式的普遍方法.

2. 等效相互作用形式的确定

首先给出纯介子过程确定等效相互作用的方法:

(1) 根据初态和末态的粒子，定出等效相互作用 H_{eff} 中有且仅有哪些场量.

例如考虑 ρ^0 介子的衰变 $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$，则 H_{eff} 中应包含 ρ^0_μ，$\pi^-_{\lambda\sigma\rho\tau}$ 和 $\pi^+_{\lambda'\sigma'\rho'\tau'}$.

(2) 用各种可能把 Lorentz 指标收缩掉，必要时可加场量的微商算符，即相应粒子的动量算符. 由于动量算符在 C 变换下并不变号，因此动量算符的 Lorentz 指标对 C 变换系数没有贡献. 如果对介子采用全对称性描写，则 C 变换系数只由场量的 Lorentz 指标数决定.

例如上例中就可写出 $\rho^0_\mu(\partial_\mu \pi^-_{\lambda\sigma\rho\tau})(\pi^+_{\lambda\sigma\rho\tau})$ 的项，其中 Lorentz 指标全部收缩掉了，但这项场量给出的 C 变换系数为负.

(3) 在这样给出 Lorentz 标量后，自动保持 P 变换不变性，因为引入 4 维动量的 Lorentz 指标在 P 变换下的性质和场量 Lorentz 指标的变换性质是完全一样的. 为了自然保证 P 变换不变性，在将 Lorentz 指标收缩掉时，不允许额外引入 4 阶完全反对称单位张量 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$.

例如，在 $\rho^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$ 衰变过程中，ρ^0 是 $J^{PC}=1^{--}$ 粒子，而 π^+ 和 π^- 是 $J^{PC}=0^{-+}$ 粒子（注意，这里 C 是指 C 变换系数）. 初态自旋为 1 而末态总自旋为零，角动量守恒靠末态轨道角动量为 P 波来保证，这点反映在不变量中包含有 π 介子的 4 维动量项.

另一方面初态宇称为负，末态内禀宇称为正，宇称守恒由末态轨道角动量的宇称来保证，它也是反映在 π 介子的动量项上.

(4) C 变换不变性和味 $SU(N)$不变性统一解决. 一般说来，在 C 变换下表示 D 变换为共轭表示 D^*，并且表示 D 中的某一态变换为 D^* 中相应的共轭的态. 在变换中出现的系数即 C 变换系数，我们以 C' 来代表，即

$$CDC^{-1}=C'D^*.$$

如果场量是介子并已表为矩阵形式 M，则由于介子实际分类为味 $SU(N)$ 的自共轭表示，$M=M^+$. 这样 C 变换后得出的 M^* 可以写作 $\tilde{M}$，即为原矩阵的转置:

$$CMC^{-1}=C'\tilde{M}.$$

味 $SU(N)$ 对称要求等效相互作用必须表成 $SU(N)$ 的标量，如果场量已用矩阵形式给出，则可以用求阵迹来实现.

例如要讨论 $\rho^0\longrightarrow\pi^++\pi^-$ 衰变过程时，就需要在 N 维空间写出 $J^{PC}=1^{--}$ 和 0^{-+} 介子的表示矩阵. 令其分别为 M'_μ 和 $M_{\lambda\sigma\rho\tau}$，可以写出一个不变量为

$$\mathrm{Tr}[M'_\mu(\partial_\mu M_{\lambda\sigma\rho\tau})M_{\lambda\sigma\rho\tau}],$$

这个不变量是 Lorentz 不变的，P 变换不变的，对 $SU(N)$ 变换也是不变的. 还要考虑其 C 变换性质，变换规则为

$$CM'_\mu C^{-1}=-\tilde{M}'_\mu,$$

$$CMC^{-1}=\tilde{M}.$$

为简便起见，略去 $J^{PC}=0^{-+}$ 粒子场量的 4 个完全反对称指标，在本例中因为它们出现为两个场量各指标对应求和，这种省略不会造成误解.

$$\begin{aligned}C\mathrm{Tr}[M'_\mu(\partial_\mu M)M]C^{-1}&=\mathrm{Tr}[\tilde{M}'_\mu\widetilde{(\partial_\mu M)}\tilde{M}]\\&=-\mathrm{Tr}[\widetilde{M(\partial_\mu M)M'_\mu}]\\&=-\mathrm{Tr}[M'_\mu M(\partial_\mu M)],\end{aligned}$$

这和原来并不一样．由此得到既满足内部对称性，又保证 C 变换不变性的不变量为

$$\mathrm{Tr}\{M_\mu^\dagger[(\partial_\mu M)M-M(\partial_\mu M)]\}.$$

根据上述作法，可以得到满足所有不变性要求的不变量．如果把一切允许的不变量都找出来，取它们的线性组合，则得到等效相互作用的最普遍表达式．

现在还要考虑的是，如果按上面四条规则给出了一个不变量后，如何确定它的耦合常数，还包含有什么任意性，这两个问题的回答统一为广义形状因子，这将在下面讨论．

3． 广义形状因子

在给出满足一切对称性要求的不变量后，前面乘一个数 g 作为耦合常数，就给出等效相互作用中允许的一项．数 g 的数值大小并不能由等效相互作用的理论确定而只能由与实验对比来定出，但等效相互作用的理论要确定 g 受哪些理论上的限制．

(1) g 必须是所有要求满足的对称性变换下的不变量．

(2) 由于场量在等效相互作用中出现的次数完全由初末态决定，因此 g 不能是场量的函数．

根据上述两条的限制可以得出：所有的分立对称性变换都并是直接作用到场量上去的，与 g 并没有直接关系；所有的内部连续对称性变换也是直接作用到场量上去的，与 g 也没有直接关系；只有性Lorentz 变换，除了场量要作变换外，场量的微商(即动量算符）也要作相应的变换．因此一般而言，g 是初态和末态中各粒子动量的标量函数，只有在特殊条件下它才是一个常数．g 相当于场论中耦合常数乘形状因子的合效果，称为广义形状因子．

对广义形状因子，有下列各点值得注意：

(1) 广义形状因子原则上可以是初末态粒子动量的任意标量函数．函数的形式并没受特殊的限制．

(2) 如果初态和末态共涉及m个粒子，即有m个 4 维动量，它们共可构成$\frac{1}{2}m(m+1)$个动量二次式的 Lorentz 标量. 然而 4 维动量守恒使其中一个粒子的 4 维动量可以通过其它 $m-1$ 个粒子的动量表出，因此独立的动量二次式的 Lorentz 标量只有$\frac{1}{2}m(m-1)$个. 初末态m个粒子的质壳条件又限制掉m个，使最后独立的动量二次式 Lorentz 标量的个数为

$$\frac{1}{2}m(m-1)-m=\frac{1}{2}m(m-3).$$

对于 $m=3,4,5,6,\cdots$，这个数值分别为 $0,2,5,9,\cdots$. 这表明对于$m=3$ 的情形，广义形状因子实际上是常数，对于$m=4$ 的情形，广义形状因子实际上是两个动量二次式 Lorentz 标量的函数，余类推.

(3) 但是即使对于 $m=3$，即 3 线顶点的情形，虽然对于任一具体过程，广义形状因子是一个确定的常数，但对于由内部对称性联系到一起的几个不同过程，则广义形状因子还会表现其“形状因子”的特征，即对不同过程取值仍可以不同. 这种情况发生于内部对称性有一定破缺的时候，即使这种破缺只反映为同一表示中不同分量的质量不同，则质壳条件的不同就会反映为广义形状因子对不同的过程取值可以不同.

(4) 一般说来，广义形状因子是有量纲的量. 介子场量的量纲是质量一次方，费米子场量的量纲是质量的 3/2 次方，场量的微商即粒子动量的量纲是质量一次方，等效相互作用的量纲是质量4次方，从等效相互作用的量纲中扣除各场量和各动量的量纲就得广义形状因子的量纲. 由于等效相互作用是已重整化的结果，广义形状因子的量纲不受可重整性的要求的限制.

(5) 由于S矩阵没有自厄性，相应地等效相互作用的广义形

状因子则不一定是实数，这是和通常相互作用 Hamiltonian 不相同的地方.

4. 含费米子的情形

费米子与介子的不同在于：介子一般分类属于 $SU(N)$ 的自共轭表示，并且实际上属于正规表示和一维表示，粒子和反粒子在同一表示中. 而费米子则可以属于非共轭表示，即使属于正规表示，费米子和反费米子也不属于同一表示；在对场量作 C 变换时，费米子的表述远比玻色子为复杂.

一般而言，粒子的 C 变换系数若为 C'，则其反粒子的 C 变换系数为 C'^*，且满足

$$C'C'^* = |C'|^2 = 1.$$

对于介子，由于粒子和反粒子属于内部对称性的同一表示，前面已讨论过，C' 可取值为 ± 1，即该表示中 Majorana 分量的 C 宇称的值. 对于费米子，由于粒子和反粒子总是分属于两个不同表示（这里暂不讨论近代大统一理论中的一些分类，那时正反夸克有可能归入同一表示），不能找相应的 Majorana 分量的 C 宇称的值来作为 C 变换系数的约定值. 然而在强相互作用和电磁相互作用的过程中，费米子的味数总是分别守恒的，不论 C 变换系数取什么约定值，最后总是全部消掉的. 在不会带来误解的情况下，通常简化地一律取作 $+1$.

如果费米子所属表示是可以用矩阵形式表述的，则上面通过矩阵形式给出等效相互作用描写的方法也可以推广到包含费米子的情形，只需补充相应的有关费米子的规则.

令 B 为费米子场量，并且在内部表示空间是一个矩阵，如果取 1, 2, 3, 4 度规，则

$$\bar{B} = B^{+}\gamma_4 = \tilde{B}^{*}\gamma_4.$$

要注意的是这里转置都是既包括 Dirac 旋量空间的转置又包括内

部表示空间中的转置. C 变换可表为

$$\mathcal{C}B\mathcal{C}^{-1}=\mathbf{C}(\widetilde{\bar{B}}),$$

其中 $\mathbf{C}$ 为 Dirac C 矩阵，它有性质

$$\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{C}^{*},\widetilde{\mathbf{C}}=-\mathbf{C},$$

$$\tilde{\gamma}_{\mu}=-\mathbf{C}^{-1}\gamma_{\mu}\mathbf{C}.$$

在 Dirac 表象中 $\mathbf{C}=i\gamma_{2}\gamma_{4}$，注意到

$$\widetilde{\bar{B}}=(\widetilde{B^{+}\gamma_{4}})=\tilde{\gamma}_{4}B^{*},$$

上式又可写作

$$\mathcal{C}B\mathcal{C}^{-1}=\mathbf{C}\tilde{\gamma}_{4}B^{*},$$

相应地还有

$$\mathcal{C}\bar{B}\mathcal{C}^{-1}=\tilde{B}\widetilde{\mathbf{C}}^{-1}=-\tilde{B}\mathbf{C}^{-1}.$$

作为一个例子，我们讨论

$$\mathrm{N}^{*}(1470)\longrightarrow\mathrm{N}(940)+\pi(140)$$

的等效相互作用，从味 $SU(3)$ 的唯象理论来说，这三个粒子都属于 $SU(3)$ 的正规表示，因此可以写出一项等效相互作用为

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}'\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\sigma}BM_{\mu\nu\lambda\sigma}).$$

利用 Lorentz 指标的完全反对称性，此式又可简写为

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}'\gamma_{5}BM),$$

作 $\mathcal{C}$ 变换，注意到这里赝标介子的 $C'=+1$，得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}\mathrm{Tr}(\bar{B}'\gamma_{5}BM)\mathcal{C}^{-1}\\
&=\mathrm{Tr}(-\tilde{B}'\mathbf{C}^{-1}\gamma_{5}\mathbf{C}\widetilde{\bar{B}}M^{*})\\
&=-\mathrm{Tr}(\tilde{B}'\tilde{\gamma}_{5}\widetilde{\bar{B}}\tilde{M})\\
&=\mathrm{Tr}(\widetilde{\bar{B}\gamma_{5}B'M})\\
&=\mathrm{Tr}(\bar{B}\gamma_{5}B'M).
\end{aligned}$$

在上面的推导中去掉了负号，这是因为两个费米场前后次序交换还要出一个负号.

这样得到满足 C 变换不变的等效相互作用之一为

$$g[\mathrm{Tr}(\bar{B}'\gamma_5 BM)+\mathrm{Tr}(\bar{B}\gamma_5 B'M)],$$

类似地还可得到另一项为

$$g'[\mathrm{Tr}(\bar{B}'\gamma_5 MB)+\mathrm{Tr}(\bar{B}\gamma_5 MB')],$$

这样得出的广义形状因子 g 与 g' 之间则没有必然联系.

用这个规则给出的等效相互作用形式和通常作法写出相互作用 Hamiltonian 后再加厄米共轭项是一致的.

如果采用的是 0,1,2,3 度规,则 C 变换表为

$$CBC^{-1}=C(\bar{B}),$$

$$C\bar{B}C^{-1}=-\tilde{B}C^{-1}$$

即和 1,2,3,4 度规时形式上一样,这时 C 矩阵选择为

$$C=i\gamma^2\gamma^0,$$

并且取表象为使 γ_0 和 γ_2 都是对称矩阵. C 矩阵有下列性质:

$$C=-C^{-1}=-C^{+}=-\tilde{C},$$

$$C\gamma_\mu C^{-1}=-\tilde{\gamma}_\mu.$$

在讨论中选用哪一种度规都是一样的, 但是要注意两者具体表述上的异同.

§8.5　三线顶点的等效相互作用

1. 三线顶点的等效相互作用

考虑初末态共有 3 个粒子的情形,等效相互作用中共引入3个场量,用 A、B 和 C 来代表,当然其中也可能有两个场量相同,但一般而言,我们按不同场量来写,以不失其普遍性, 何况即使是相同场量,如果微商阶数不同则也可以区分.

为讨论简单,假定 A、B 和 C 均已写成内部表示空间的矩阵形式,并且 Lorentz 指标均已缩并,P 变换不变性已自动保证. 在此基础上略去 Lorentz 指标及场量微商等符号, 只保留场量表示矩

阵来集中讨论 C 变换对等效相互作用所加的限制.

如果 A、B 和 C 都是正规表示，单个矩阵的阵迹为零，等效相互作用的普遍形式为

$$H_{eff}=g_1\mathrm{Tr}(ABC)+g_2\mathrm{Tr}(ACB),$$

其中 g_1 和 g_2 是广义形状因子. 在 C 变换下

$$CH_{eff}C^{-1}=C'_AC'_BC'_C[g_1\mathrm{Tr}(ACB)+g_2\mathrm{Tr}(ABC)],$$

这里用到了规则

$$\begin{aligned}C(\mathrm{Tr}ABC)C^{-1}&=C'_AC'_BC'_C\mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C})\\&=C'_AC'_BC'_C\mathrm{Tr}(\widetilde{CBA})\\&=C'_AC'_BC'_C\mathrm{Tr}(ACB).\end{aligned}$$

由这个结果得出 C 变换不变要求

$$\text{若 } C'_AC'_BC'_C=+1,\text{ 则 } g_1=g_2,$$

$$\text{若 } C'_AC'_BC'_C=-1,\text{ 则 } g_1=-g_2.$$

这是对等效相互作用很强的限制，它表明只有一个独立的广义形状因子.

如果在矩阵 A、B 和 C 中都还允许混有一维表示，则等效相互作用中还允许存在下列的项:

$$\begin{aligned}&f_1\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(BC)+f_2\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(CA)\\&+f_3\mathrm{Tr}(C)\mathrm{Tr}(AB)+f_4\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(C)\end{aligned}$$

C 变换对之同样加了很强的限制，例如

$$\begin{aligned}&C[\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(BC)]C^{-1}\\&=C'_AC'_BC'_C\mathrm{Tr}(\tilde{A})\mathrm{Tr}(\tilde{B}\tilde{C})\\&=C'_AC'_BC'_C\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(BC),\end{aligned}$$

因此只有在 $C'_AC'_BC'_C=+1$ 时，才能允许存在这 4 项.

综上所述，对于 3 线顶点，等效相互作用的普遍形式为

(1) 当 $C'_AC'_BC'_C=+1$ 时,

$$H_{eff}=g[\mathrm{Tr}(ABC)+\mathrm{Tr}(ACB)]$$

$$+f_1\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(BC)+f_2\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(CA)$$

$$+f_3\mathrm{Tr}(C)\mathrm{Tr}(AB)+f_4\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(C),$$

有六个独立的广义形状因子;

(2) 当 $C'_A C'_B C'_C = -1$ 时,

$$H_{\mathrm{eff}} = g[\mathrm{Tr}(ABC) - \mathrm{Tr}(ACB)],$$

有一个独立的广义形状因子.

现在回过来看 $\rho^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$ 的例子，前面已得出其等效相互作用为

$$H_{\mathrm{eff}} = g\mathrm{Tr}\{M'_\mu[(\partial_\mu M)M - M(\partial_\mu M)]\},$$

根据上述分析,这个表达式就是最普遍的结果.

现在实验中已经发现 5 种味的夸克，但在实验中研究得较多的是前 4 种，相应的味对称性为 $SU(4)$. 在这个对称性下，矢量介子($J^{PC}=1^{--}$)和赝标介子($J^{PC}=0^{-+}$)都分别构成 15 维正规表示和一维表示,并可统一由一个 4×4 矩阵描写:

$$M'_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^0_\mu + \omega_\mu) & \rho^+_\mu & K^{*+}_\mu & D^{*0}_\mu \\ \rho^-_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}(-\rho^0_\mu + \omega_\mu) & K^{*0}_\mu & D^{*-}_\mu \\ K^{*-}_\mu & \overline{K}^{*0}_\mu & \varphi_\mu & F^{*-}_\mu \\ D^{*0}_\mu & D^{*+}_\mu & F^{*+}_\mu & J_\mu \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} + \frac{\eta'}{2} & \pi^+ & K^+ & \overline{D}^0 \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} + \frac{\eta'}{2} & K^0 & D^- \\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}} + \frac{\eta'}{2} & F^- \\ D^0 & D^+ & F^+ & -\frac{3\eta_c}{\sqrt{12}} + \frac{\eta'}{2} \end{pmatrix},$$

其中 F 粒子和 F^* 粒子现在已正式分别改称 D_S 粒子和 D_S^* 粒子.

这里对于矢量介子，上述矩阵表示给出的是味 $SU(4)$ 的 $\mathbf{1}+\mathbf{15}$ 理想混合；对于赝标介子，给出的是味 $SU(4)$ 无混合的 $\mathbf{1}+\mathbf{15}$. 在实际处理问题时，矢量介子和赝标介子都应考虑实际的味混合角而作相应的改动. 如果我们引入简记符号

$$(ABC)\equiv gA_\mu[(\partial_\mu B)C-B(\partial_\mu C)],$$

则等效相互作用的明显表达式为

$$\begin{aligned}
H_{eff}=&\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega K^+K^-)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega K^0\overline{K}^0)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega D^-D^+)\\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\overline{D}^0D^0)+\sqrt{2}(\rho^0\pi^+\pi^-)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^0K^-K^-)\\
&-\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^0K^0\overline{K}^0)-\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^0D^-D^+)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^0\overline{D}^0D^0)\\
&+\sqrt{2}(\rho^+\pi^-\pi^0)+(\rho^+K^0K^-)+(\rho^+D^-D^0)\\
&+\sqrt{2}(\rho^-\pi^0\pi^+)+(\rho^-K^+\overline{K}^0)+(\rho^-\overline{D}^0D^+)\\
&+(\varphi K^-K^+)+(\varphi\overline{K}^0K^0)+(\varphi F^-F^+)\\
&+(K^{*+}\overline{K}^0\pi^-)+(K^{*+}F^-D^0)+\frac{1}{\sqrt{2}}(K^{*+}K^-\pi^0)\\
&+\sqrt{\frac{3}{2}}(K^{*+}K^-\eta)+(K^{*0}K^-\pi^+)+(K^{*0}F^-D^+)\\
&-\frac{1}{\sqrt{2}}(K^{*0}\overline{K}^0\pi^0)+\sqrt{\frac{3}{2}}(K^{*0}\overline{K}^0\eta)+(\overline{K}^{*0}\pi^-K^+)\\
&+(\overline{K}^{*0}D^-F^+)-\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{K}^{*0}\pi^0K^0)+\sqrt{\frac{3}{2}}(\overline{K}^{*0}\eta K^0)\\
&+(K^{*-}\pi^+K^0)+(K^{*-}\overline{D}^0F^+)+\frac{1}{\sqrt{2}}(K^{*-}\pi^0K^+)\\
&+\sqrt{\frac{3}{2}}(K^{*-}\eta K^+)+(JD^0\overline{D}^0)+(JD^+D^-)+(JF^+F^-)\\
&+(D^{*-}\pi^-\overline{D}^0)-\frac{1}{\sqrt{2}}(D^{*+}\pi^0D^-)+\frac{1}{\sqrt{6}}(D^{*+}\eta D^-)
\end{aligned}$$

$$
+\sqrt{\frac{4}{3}}(D^{*+}\eta_c D^-)+(D^{*+}K^0F^-)+(D^{*0}\pi^+D^-)
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{2}}(D^{*0}\pi^0\bar{D}^0)+\frac{1}{\sqrt{6}}(D^{*0}\eta\bar{D}^0)+\sqrt{\frac{4}{3}}(D^{*0}\eta_c\bar{D}^0)
$$

$$
+(D^{*0}K^+F^-)+(\bar{D}^{*0}D^+\pi^-)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{D}^{*0}D^0\pi^0)
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{D}^{*0}D^0\eta)+\sqrt{\frac{4}{3}}(\bar{D}^{*0}D^0\eta_c)+(\bar{D}^{*0}F^+K^-)
$$

$$
+(D^{*-}D^0\pi^+)-\frac{1}{\sqrt{2}}(D^{*-}D^+\pi^0)+\frac{1}{\sqrt{6}}(D^{*-}D^+\eta)
$$

$$
+\sqrt{\frac{4}{3}}(D^{*-}D^+\eta_c)+(D^{*-}F^+\bar{K}^0)+(F^{*+}K^-\bar{D}^0)
$$

$$
+(F^{*+}\bar{K}^0D^-)-\sqrt{\frac{2}{3}}(F^{*+}\eta F^-)+\sqrt{\frac{4}{3}}(F^{*+}\eta_c F^-)
$$

$$
+(F^{*-}D^0K^+)+(F^{*-}D^+K^0)-\sqrt{\frac{2}{3}}(F^{*-}F^+\eta)
$$

$$
+\sqrt{\frac{4}{3}}(F^{*-}F^+\eta).
$$

利用这个等效相互作用，就可以自然地给出各种 $1^{--}\longrightarrow 0^{-+}+0^{-+}$ 衰变部分宽度之比．一般说来，计算这些部分宽度时需要用到有关表示合成的 C-G 系数，但在这里，这些 C-G 系数不需要查表，只需要利用矩阵乘法就自动给出了．

一般说来，由

$$
\lambda g M'_\mu[(\partial_\mu M_1)M_2-M_1(\partial_\mu M_2)]
$$

所给出的 $M'\longrightarrow M_1-M_2$ 衰变的部分宽度为

$$
\Gamma=\lambda^2\frac{g^2}{4\pi}\frac{2}{3}\frac{k^3}{m'^2}
$$

其中 g 为广义形状因子，即等效耦合常数；λ 为 C-G 系数，在上面已自然求出； m' 为 M' 粒子的质量； k 为在 M' 质心系中 $M'\longrightarrow$

M_1+M_2 的衰变动量

$$k=\frac{1}{2m'}\{[m'^2-(m_1-m_2)^2][m'^2-(m_1-m_2)^2]\}^{1/2},$$

其中 m_1 和 m_2 分别为M_1 和 M_2 的质量.

如果假定广义形状因子(在 3 线顶点时它是常数，即只决定于初态和末态粒子的质量.)g 与初态和末态粒子质量无关，则应有

$$\frac{\Gamma m'^2}{\lambda^2 k^2}=\frac{g^2}{4\pi}\frac{2}{3},$$

对各不同粒子的衰变取相同的值，上式亦可表为

$$\frac{\Gamma m'^2}{k^3}=\left(\frac{g^2}{4\pi}\frac{2}{3}\right)\lambda^2\propto\lambda^2$$

实际能量允许的衰变过程有

$$\rho\to\pi\pi,\ K^*\to K\pi,\ \varphi\to K\bar{K},\ D^*\to D\pi$$

它们的 λ^2 之比为 4:3:4:3. 由前 3 个粒子衰变过程给出的$\Gamma m'^2/k^3$ 很好地符合上述预言. D^*的衰变由于衰变动量太小对 D^* 和D 的质量差很敏感，D^*的衰变宽度测量还不够准确，还不能作出确切的比较.

2. 广义形状因子的影响

前面已经讲到，对于 3 线顶点广义形状因子实际上是常数，因为一般说来，广义形状因子是初态和末态各粒子动量的标量函数，若 3 个场量为 A、B 和 C，则广义形状因子应是

$$k_A^2,\ k_B^2,\ k_C^2,\ (k_A,k_B),\ (k_A,k_C),\ (k_B,k_C)$$

的函数. 但是由于质壳条件

$$k_A^2=-m_A^2,$$

$$k_B^2=-m_B^2,$$

$$k_C^2=-m_C^2,$$

而交叉项又总能化为质壳项，例如由

$$k_A^2=(k_B+k_C)^2$$

得到

$$(k_B, k_C)=\frac{1}{2}(m_B^2+m_C^2-m_A^2)$$

这样广义形状因子最终归结为是 m_A^2、m_B^2、m_C^2 的函数 $g(m_A^2, m_B^2, m_C^2)$，对于任一确定的过程，m_A^2, m_B^2, m_C^2 都是确定的数．因此 g 也就取确定的数值，即实际上是一个常数．

对于由内部对称性所联系起来的许多不同过程，虽然如上那样给出各过程之间确定的比例关系，但是由于对称性的破缺反映为同一表示中各粒子质量会有所不同．这样对不同过程来说，m_A^2，m_B^2，m_C^2 都将取不同值，从而使广义形状因子对不同过程可能不同．例如在上面处理的 $\rho\to\pi\pi$ 和 $K^*\to K\pi$ 两个过程，广义形状因子取值分别为 $g(m_\rho^2, m_\pi^2, m_\pi^2)$ 和 $g(m_{K^*}^2, m_K^2, m_\pi^2)$，显然，它们很可能不相等．

然而由于 g 对 3 个粒子质量的依赖关系实际上是完全未知的，如果考虑到这一点，所得到的等效相互作用表达式实际上没有任何预言．唯象分析常用的作法是：味对称性对场量及相互作用的描写还是很好地成立的，味对称性的破缺主要体现在同一表示中各粒子的质量可以有所不同，因此在考虑对称性破缺的影响时，主要考虑质量分裂带来的影响．质量分裂的影响反映在相空间上是确定的，并且是可以计算的，但反映在广义形状因子上则是未知的．通常的作法是先把 g 看作完全与质量无关的常数来分析．如果对几个过程的分析结果与实验符合得很好，则认为 g 对质量的依赖关系是不敏感的，可以近似地作为常数来对待．如果发现 g 对质量变化比较敏感，则要设法定出 g 对 m_A^2、m_B^2、m_C^2 的函数依赖关系，这时分析工作就要复杂得多了．

一般现在利用等效相互作用方法对强子共振态作唯象分析时，比较多的情况下发现假定 g 对初末态粒子质量的依赖性不敏

虑，在初级近似下是能够与实验符合的.

3. 含光子顶点的等效相互作用

在讨论介子的辐射衰变时，就需要处理含光子的顶点，在有光子参与的过程中，味 $SU(N)$ 的内部对称性实际是破缺了的，问题是在写出等效相互作用时，怎样可以把这种破缺以确定的形式体现出来.

光子总是由电流发射或吸收的，因此问题归结为在 $SU(N)$ 的内部对称性的基础上，如何把可以与光子相互作用的电流挑选出来. 在内部对称性只是 $SU(2)$ 同位旋时，电磁相互作用把同位旋对称性破坏了，总同位旋不守恒. 这时对称性破缺的后果可以通过电荷算符表为同位旋标量与同位旋矢量两部分之和来体现. 现在需要在味 $SU(N)$ 对称性下，找出相对应的描述方法. 这种描述方法实质上就是找出在味 $SU(N)$ 整体对称性下，强子的电荷算符如何表述. 并且考虑到所有的表示都可通过基本表示给出，只要给出电荷算符在基本表示空间的表示矩阵就行了. 强子结构的夸克模型已经为此提供了表达式，即各味夸克电荷组成的对角矩阵，当然即使不依靠夸克模型而直接从唯象分析入手，也可以得到相同的结果.

在处理含光子顶点时规则如下：

(1) 光子的 $SU(N)$ 群变换性质用 $A_\mu Q$ 描写. A_μ 为光子场量，Q 为 $N\times N$ 对角矩阵，其对角元为 $(2/3, -1/3, -1/3, 2/3, -1/3, 2/3, \cdots)$ 中取前 N 个. 将这样的矩阵放入，完全按前面的规则来写出等效相互作用.

(2) 在写出不变量时，尽管 Q 矩阵的阵迹可以不为零 ($N>3$ 时)，但因放出光子的电流是由强子提供的，因此 Q 矩阵必须与介子场量或正反费米子场量相联接再求阵迹才有贡献，不允许含 $\mathrm{Tr}(Q)$ 项出现.

(3) 等效相互作用必须满足规范不变性即在动量表象中，作

代换

$$e_\mu^\gamma \longrightarrow q_\mu^\gamma,$$

则等效相互作用自动得零. 其中 e_μ^γ 为光子的极化矢量, q_μ^γ 为光子的四维动量.

规范不变性使光子参与的等效相互作用受很强的限制. 以$\psi' \to X+\gamma$ 的辐射衰变来说明: ψ'为 $J^{PC}=1^{--}$, 质量 $m_{\psi'}=(3686.00 \pm 0.10)$ MeV 的新粒子, X 为 $J^{PC}=2^{++}$, 质量 $m_X=(3556.3\pm 0.4)$ MeV 的新粒子. 令 ψ', X, γ 的极化张量分别为 $e_\mu^{\psi'}$, $e_{\mu\nu}^X$, e_μ^γ, 它们的四维动量分别为 $k_\mu^{\psi'}$, k_μ^X, q_μ. 考虑到动量守恒的要求, k_μ^X 的贡献都可以化为 $k_\mu^{\psi'}$ 和 q_μ 之和, 为简单起见, $k_\mu^{\psi'}$ 简记作 k_μ.

按照上面给出的写出等效相互作用的普遍规则和极化张量满足的附加条件, 可以得到在动量表象中等效相互作用的普遍形式为

$$g_1 e_\mu^\gamma e_{\mu\nu}^X e_\nu^{\psi'} + g_2 q_\mu e_\mu^{\psi'} q_\lambda e_{\lambda\nu}^X e_\nu^\gamma + g_4 k_\mu e_\mu^\gamma q_\lambda e_{\lambda\nu}^X e_\nu^{\psi'}$$
$$+ g_3 e_\mu^\gamma e_\mu^{\psi'} q_\lambda e_{\lambda\nu}^X q_\nu + g_5 q_\mu e_\mu^{\psi'} k_\sigma e_\sigma^\gamma q_\lambda e_{\lambda\nu}^X q_\nu,$$

规范不变性要求

$$(g_1 + g_4 k_\mu q_\mu)(q_\lambda e_{\lambda\nu}^X e_\nu^{\psi'}) +$$
$$+ (g_2 + g_3 + g_5 k_\mu q_\mu)(q_\sigma e_\sigma^{\psi'} q_\lambda e_{\lambda\nu}^X q_\nu) = 0,$$

亦即要求两项的系数分别为零, 即

$$g_1 + g_4 k_\mu q_\mu = 0,$$
$$g_2 + g_3 + g_5 k_\mu q_\mu = 0,$$

因此 $g_1, \cdots, g_5$ 中只有三个是独立的. 如果在 ψ 的质心系中讨论, 光子条件进一步给出

$$k_\mu e_\mu^\gamma = 0,$$

则在实际计算时, 只需考虑含 g_1, g_2, g_3 的这 3 项就是普遍形式了.

再看最常见的辐射衰变

$$1^{--} \longrightarrow 0^{-+} + \gamma$$

用M'_μ代表$J^{PC}=1^{--}$介子场量的矩阵表述，$M_{\mu\nu\lambda\sigma}\equiv M\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$代表$J^{PC}=0^{-+}$介子场量的矩阵表述. 这时由于$C$变换系数之积为$+1$，原则上内部空间结构可以允许有独立的5项，但我们暂只讨论第一项. 按上面给出的规则，等效相互作用可表为

$$g\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\mathrm{Tr}[(\partial_\mu M'_\nu)(QM+MQ)]\partial_\lambda A_\sigma,$$

将M'_μ, M, Q的矩阵形式代入就可得到等效相互作用的明显表达式. 我们在$SU(4)$的情形中具体写出来，引入简写符号

$$(BC)=g\nu_{\mu\nu\lambda\sigma}(\partial_\mu B_\nu)(\partial_\lambda A_\sigma)C$$

其中B和C分别是一个具体的矢量介子和赝标介子的场量，A则仍为光子的场量. 等效相互作用可普遍表为

$$\begin{aligned}H_{eff}=&\frac{1}{3}[(\rho^+\pi^-)+(\rho^-\pi^+)+(K^{*+}K^-)+(K^{*-}K^+)\\&+(D^{*+}D^-)+(D^{*-}D^+)+(F^{*+}F^-)+(F^{*-}F^+)\\&-\frac{2}{3}[(K^{*0}\bar{K}^0)+(\bar{K}^{*0}K^0)]+\frac{4}{3}[(D^{*0}\bar{D}^0)+(\bar{D}^{*0}D^0)]\\&+\frac{1}{3}(\rho^0\pi^0)+\frac{1}{3\sqrt{3}}(\rho^0\eta)+\frac{1}{3\sqrt{6}}(\rho^0\eta_c)\\&+\frac{1}{3\sqrt{2}}(\rho^0\eta')+(\omega\pi^0)+\frac{1}{\sqrt{3}}(\omega\eta)+\frac{1}{\sqrt{6}}(\omega\eta_c)\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\eta')+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\varphi\eta)-\frac{1}{3\sqrt{3}}(\varphi\eta_c)\\&-\frac{1}{3}(\varphi\eta')-\frac{2}{\sqrt{3}}(J\eta_c)+\frac{2}{3}(J\eta').\end{aligned}$$

值得注意的是$\omega\longrightarrow\pi^0+\gamma$和$\rho^-\longrightarrow\pi^-+\gamma$这两个过程，初态$\omega$和$\rho^-$质量相近，因此这两个过程的运动学相空间相近，这两个过程形状因子的影响也基本上相同. 利用上面的等效相互作用预言

$$\Gamma(\omega\to\pi^0\gamma)\approx q\Gamma(\rho^-\to\pi^-\gamma).$$

实验上测得的这两者之比为10.7 ± 1.2，实验结果很好地符合理论预言.

§8.6 四线顶点的等效相互作用

1. 四线顶点与三线顶点的比较

四线顶点描述的是二体到二体的反应过程和粒子的三体衰变，尽管确定四线顶点等效相互作用所遵循的规则和三线顶点是相同的，但是在实际唯象分析工作中，四线顶点远比三线顶点复杂. 主要表现在:

(1) 四线顶点的等效相互作用中包含四个场量. 在这四个场量的基础上，根据普遍的要求构成的 Lorentz 不变量独立的项数可能比三线顶点相应给出的项数要多而且复杂.

(2) 在四线顶点的等效相互作用中，由四个场量构成的内部对称性 $SU(N)$ 不变的独立不变量也远比三线顶点时要多而且复杂.

(3) 在四线顶点中，即使对一个确定的过程，广义形状因子也不保持是常数. 在前面已指出，四个粒子的四维动量所组成的 10 个二次 Lorentz 标量中，考虑了四维动量守恒和质壳条件后，还有两个可以独立变化的量，在 2⟶2 反应过程中，这两个标量常选作 s 和 t，广义形状因子一般也应是这两个标量的函数.

考虑三体衰变

$$A\longrightarrow B+C+D,$$

两个独立的标量变量可选作 (k_A,k_B)，(k_A,k_C)，(k_A,k_D) 中的任两个，因为这三个量还满足

$$(k_A,k_B)+(k_A,k_C)+(k_A,k_D)=k_A^2=-m_A^2.$$

在质心系中，这三个量分别为

$$-m_A\omega_B,\ -m_A\omega_C,\ -m_A\omega_D,$$

其中 ω 为粒子的能量. 这表明在质心系中，可以取 $\omega_B,\omega_C,\omega_D$ 中任两个为变量. 在介子共振态的分析中，经常遇到的是 B, C, D

都是赝标介子的情形，特别是 B, C, D 都是 π 介子的情形. 为了便于讨论形状因子的对称性质，常在形式上保留形状因子是 ω_B, ω_C, ω_D 的函数，同时再加约束条件

$$\omega_B+\omega_C+\omega_D=m_A,$$

实际分析时常用质心系衰变动能 $T_i=\omega_i-m_i$ 为变量 ($i=B, C, D$).

如果 B, C, D 都是同一种粒子，衰变动能很小，把广义形状因子按 T 作展开，并考虑到完全对称性

$$\begin{aligned}g(T_B, T_C, T_D)=&g_0+g_1(T_B+T_C+T_D)\\&+g_2(T_B^2+T_C^2+T_D^2)+g_2'(T_B+T_C+T_D)^2+\cdots\\=&g_0+g_1(m_A-3m)+g_2'(m_A-3m)^2\\&+g_2(T_B^2+T_C^2+T_D^2)+\cdots,\end{aligned}$$

这样广义形状因子对动能的依赖性实际上是从二次项开始，如果常数项较大，形状因子基本可看作是个常数.

2. 等效相互作用的 $SU(N)$ 群结构

在三线顶点中，独立的 $SU(N)$ 群不变量有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(ABC), \mathrm{Tr}(ACB),\\&\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}C, \mathrm{Tr}(BC)\mathrm{Tr}A, \mathrm{Tr}(CA)\mathrm{Tr}B,\\&\mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B\mathrm{Tr}C\end{aligned}$$

共 6 项. 它们可以分别与一个场图对应，举例如图 8.3 所示.

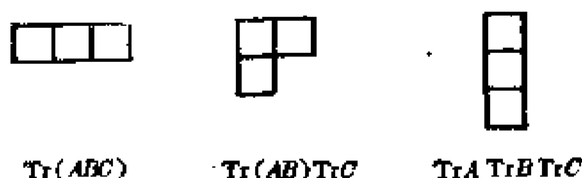


图 8.3　求迹项对应的杨图

在四线顶点中，相应的不变量为 6 项，8 项，3 项，6 项和 1 项，共计 24 项，依次明显地写出为

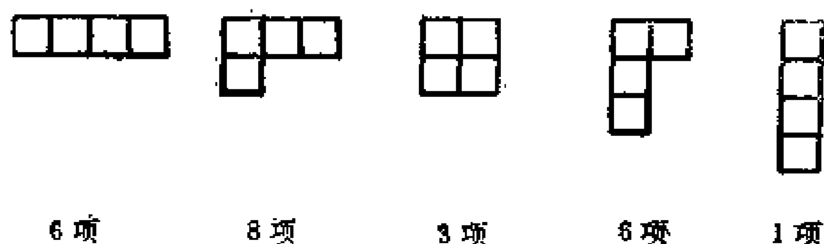


图 8.4　4 线顶点各种求迹独立项数

Tr$(ABCD)$, Tr$(ABDC)$, Tr$(ACBD)$, Tr$(ACDB)$,

Tr$(ADBC)$, Tr$(ADCB)$,

Tr(ABC)TrD, Tr(ACB)TrD, Tr(ABD)TrC, Tr(ADB)TrC,

Tr(ACD)TrB, Tr(ADC)TrB, Tr(BCD)TrA, Tr(BDC)TrA,

Tr(AB)Tr(CD), Tr(AC)Tr(BD), Tr(AD)Tr(BC)

Tr(AB)TrCTrD, Tr(AC)TrBTrD, Tr(AD)TrBTrC,

Tr(BC)TrATrD, Tr(BD)TrATrC, Tr(CD)TrATrB,

TrATrBTrCTrD.

如果考虑了 C 变换的不变性，独立项数会减少．一般而言，对 k 个场量矩阵的乘积求阵迹的项经过 C 变换后不一定仍回到自身，当且仅当 $k=1$ 和 2 时才会回到自身．因此，由不超过两列格子的杨图所代表的项都只在 $\prod_i C_i' = +1$ 时才存在，而对列数多于两列的杨图所代表的项经过对称和反对称组合后，有半数属于 $\prod_i C_i' = +1$ 时存在，半数属于 $\prod_i C_i' = -1$ 时存在．根据这个判断规则，四线顶点中属于 $\prod_i C_i' = -1$ 的独立不变量有 7 项，属于 $\prod_i C_i' = +1$ 的独立不变量有 17 项．

对于五线顶点，不变量的杨图分类如图 8.5 所示，分为 24 项，30 项，20 项，20 项，15 项，10 项和 1 项．

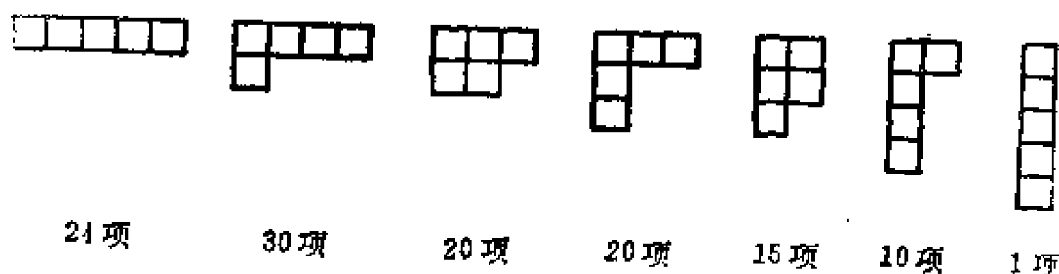


图 8.5　5 线顶点各种求迹独立项数

根据上述规则判断，C 变换不变项要求：

$$\prod_i C_i^i = -1，独立的 47 项，$$

$$\prod_i C_i^i = +1，独立的 73 项.$$

上面的结果可列表 8.2，表中给出的数值是等效相互作用中的独立项数.

表 8.2　等效相互作用中的独立项数

	三线顶点	四线顶点	五线顶点	六线顶点
$\prod_i^i C_i^i = -1$	1	7	47	342
$\prod_i^i C_i^i = +1$	6	17	73	883

从这个表中可以看出，随着顶点上粒子线的增加，即使只从内部对称性和 C 变换不变性要求来看，独立不变量的项数也将迅速增加．这也就是很少有人用等效相互作用的分析来处理多于四线顶点问题的原因.

§8.7　广义形状因子

1. 广义形状因子的不确定性

广义形状因子具有不确定性，即使是对于具体过程取确定常数值的三线顶点广义形状因子，其不确定性也会通过内部对称性

的破缺在对称性联系起来的各过程之间反映出来.对于四线顶点,广义形状因子的不确定即使对于一个特定具体过程也会表现出来,然而其函数形式则完全是未知的,并且从一般的原理上也并未给出特殊的限制.

在等效相互作用理论中所出现的广义形状因子兼有通常所述耦合常数和形状因子两方面的作用,由于这两方面的作用总是一起出现的,完全不必要作这种人为的区分,同时在等效相互作用理论中也没有理论依据来区分它们,因此总起来用广义形状因子来统一描述.这就使通常形状因子满足的归一条件的限制对广义形状因子也不存在,更增加了其不确定性.

形状因子问题是粒子理论中的基本问题.如果一个理论能够对任何实际过程都能给出正确的形状因子,就表明在粒子层次物质运动的基本规律基本上被认识了.量子电动力学对于纯电磁作用过程,在现有实验范围内基本上解决了这个问题.电弱统一的G-W-S模型也在现有实验范围内在一定精度内解决了这个问题.而在牵涉到强相互作用的过程中,虽然有了量子色动力学的理论,然而只能对某些特定范围内的问题,在比较粗的精度内计算解决这个问题,离完全解决仍距离很远.因此,分析解决这个问题的困难所在,在理论上进行探索是很有意义的.由于等效相互作用分析直接以唯象描述的形式出现,对形状因子的函数形式和性质并不能给出特殊的限制,为了去除这种不确定性,适当地引入某些物理模型的假定作为补充还是有意义的.

下面讨论在等效相互作用分析中,为确定形状因子的形式而常采用的几种近似模型假定.

2. 三线顶点近似

一种重要的观点是假定所有多线顶点都是由三线顶点通过虚过程组合而成,这种观点是在量子电动力学的启示下得出的,但是

对一个具体的四线顶点应怎样分解成两个三线顶点，虚过程是什么粒子，则还需要具体的物理假定。在色散关系理论中，讨论的极点近似就是属于这种观点的类型。

例如 $\omega\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 衰变在三线顶点近似下通常看作是由 $\omega\to\rho\pi$ 和 $\rho\to\pi\pi$ 两个三线顶点构成，ρ 是中间过程存在的虚粒子。这两个三线顶点的等效相互作用分别由以下两式描写：

$$g\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}(\partial_\mu\omega_\nu)(\partial_\lambda\rho_\sigma)\cdot\pi,$$

$$f\rho_\mu\cdot(\partial_\mu\pi)\times\pi.$$

由于这时 ρ 不在质壳上，广义形状因子 g 和 f 不一定是常数，一般说来，它们都是 ρ 介子四维动量平方的函数。$\omega\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 的跃迁振幅为

$$\sum_{\substack{i,j,l=\\(+,0,-)\text{轮换}}} gf\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}k_\mu^\omega e_\nu^\omega(k_\lambda^i+k_\lambda^j)\frac{\delta_{\sigma\sigma'}+\frac{(k^j+k^i)_\sigma(k^i+k^j)_{\sigma'}}{m_\rho^2}}{(k^i+k^j)^2+m_\rho^2-im_\rho\Gamma_\rho}\cdot(k^i-k^j)_{\sigma'}$$

$$=\sum_{\substack{i,j,l=\\(+,0,-)\text{轮换}}} 2gf\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}k_\mu^\omega e_\nu^\omega k_\lambda^j k_\sigma^i\frac{1}{(k^i+k^j)^2+m_\rho^2-im_\rho\Gamma_\rho}$$

这样也就是说 $\omega\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 衰变的等效相互作用可表为

$$H_{eff}=G\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}(\partial_\mu\omega_\nu)(\partial_\lambda\pi^+)(\partial_\sigma\pi^-)\pi^0$$

其中广义形状因子 G 在三线顶点近似下为

$$G=\sum_{\substack{i,j,l=\\(+,0,-)\text{轮换}}} G'((k^i+k^j)^2),$$

式中

$$G'(q^2)=\frac{2g(q^2)f(q^2)}{q^2+m_\rho^2-im_\rho\Gamma_\rho}.$$

显然，当三线顶点广义形状因子 $g(q^2)$ 和 $f(q^2)$ 未知时，四线顶点的形状因子仍然是未知的。

但是由于$G'(q^2)$中有一个敏感因子——极点项，如果$g(q^2)$和$f(q^2)$在极点附近是缓变的且不为零，则在$G'(q^2)$中可将$g(q^2)$和$f(q^2)$近似地看作常数并且就取极点处的值．这样四线顶点的广义形状因子的函数形式也就完全确定下来了．

从这个例子可以看出：采用三线顶点近似的假定，只能把多线顶点的广义形状因子归结为三线顶点的广义形状因子，但三线顶点广义形状因子还需要由进一步的物理考虑来决定．

在唯象的理论分析中，常用的三线顶点近似方法是从下列两个假定出发的．

(1) 多线顶点的贡献主要来自三线顶点的级联过程．

(2) 三线顶点的广义形状因子近似为常数．

在这两条假定下，所有多线顶点的广义形状因子都可以通过具体的级联过程机理确定下来．

3．矢量为主模型

与三线顶点近似相类似的一个唯象模型是矢量为主模型，这主要是针对光子与强子相互作用的现象提出的．

矢量为主模型的基本假定是：光子与强子的相互作用都是通过光子转化成矢量介子，矢量介子再与其它强子相互作用．

在实际应用时，光子与矢量介子的等效相互作用顶点用$gA_\mu V_\mu$描写，其中V_μ代表矢量介子的场量，其耦合常数g由矢量介子的轻子型衰变

$$\mathrm{V}\longrightarrow\gamma\longrightarrow\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-(\text{或 }\mu^+\mu^-)$$

的实验来确定

$$\Gamma(\mathrm{V}\longrightarrow\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-)=\alpha g^2\frac{1}{3m_\mathrm{V}^3}.$$

矢量为主模型不仅限于处理广义形状因子问题，还有很多方面的应用，举几个典型的例子．

(1) π 介子的电磁形状因子

考察 π^+ 介子放出或吸收光子的过程，其中光子可以不在质壳上，但初态和末态的 π 介子在质壳上，按照矢量为主模型，这个过程可由图 8.6 描写，两个顶点的等效相互作用分别为

$$g\rho_\mu^0 A_\mu,$$

$$f\rho_\mu^0[(\partial_\mu\pi^+)\pi^- - \pi^+(\partial_\mu\pi^-)].$$

如果把初态和末态 π 介子的四维动量分别记作 k 和 k'，光子的四

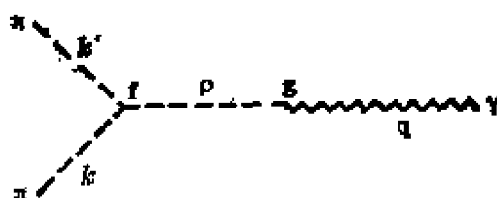


图 8.6 矢量为主模型

维动量记作 q，则按图 8.6 给出 π 介子的电磁形状因子为

$$G_\pi(q^2) = \frac{fg}{e}\frac{1}{q^2+m_\rho^2} = \frac{fg}{em_\rho^2}\frac{1}{1+q^2/m_\rho^2},$$

电荷归一化要求在 $q^2=0$ 时

$$\frac{fg}{m_\rho^2} = e.$$

如果 fg 不随 q^2 改变，则 π 介子的电磁形状因子为

$$G_\pi(q^2) = \frac{1}{1+q^2/m_\rho^2}.$$

实验测到的 π 介子的电磁形状因子在一个相当大的 q^2 范围内很好地符合上式的预言.

另一方面，由上述等效相互作用顶点还可描写 $\rho^0\to\pi^+\pi^-$ 和 $\rho^0\to e^+e^-$ 过程，给出的部分宽度计算值分别为

$$\Gamma(\rho^0\to\pi^+\pi^-) = \frac{f^2}{4\pi}\cdot\frac{2}{3m_\rho^2}\left(\frac{m_\rho^2}{4}-m_\pi^2\right)^{3/2},$$

$$\Gamma(\rho^0\to e^+e^-) = \alpha g^2\frac{1}{3m_\rho^3}.$$

由此得到

$$\Gamma(\rho^0\to\pi^+\pi^-)\cdot\Gamma(\rho^0\to e^+e^-)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{fg}{m_\rho^2}\right)^2\frac{\alpha}{36}m_\rho^3\left(1-\frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2}\right)^{3/2}.$$

注意这里出现的耦合常数(即广义形状因子)f 和 g 都是在相当于 $q^2=-m_\rho^2$ 时的值．如果 fg 的值不随 q^2 改变的假定成立的话，则可以利用电荷归一化定出的值代入，即

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{fg}{m_\rho^2}\right)^2=\alpha.$$

将实验值代入等式两边得到等式两边的值分别为

$$(0.987\pm0.060)\,\mathrm{MeV}^2,\ (0.710\pm0.007)\,\mathrm{MeV}^2.$$

这也表明 (fg) 不随 q^2 改变的假定在一定近似下还是较好地成立的．这个检验正好印证了 π 介子电磁形状因子实验中的检验结果．

(2) 矢量介子的辐射衰变

矢量介子的辐射衰变可以类似于 π 介子形状因子的讨论来处理．例如 $\omega\to\pi^0\gamma$ 可以看作是由 $\omega\to\pi^0\rho^0$ 顶点和 $\rho^0\to\gamma$ 顶点联接而成．如果 $\omega\to\pi^0\rho^0$ 由等效相互作用

$$f\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}(\partial_\mu\omega_\nu)(\partial_\lambda\rho_\sigma^0)\pi^0$$

描写，则

$$\Gamma(\omega\to\pi^0\gamma)=\frac{f^2}{4\pi}\frac{g^2}{3m_\rho^4}|\boldsymbol{q}|^3,$$

其中 $\boldsymbol{q}$ 为在 ω 质心系中光子的衰变动量．

类似地还可计算其它矢量介子的辐射衰变．值得注意的是，形状因子 f 对不同粒子是缓变的假定在量级上大体是符合的，即 f 近似为常数．

赝标介子的辐射衰变也可以用矢量为主模型来计算．例如由 $\pi^0\to\gamma\gamma$ 通过矢量为主模型定出的 $\omega\pi^0\rho^0$ 顶点耦合常数 f 与 $\omega\to\pi^0\gamma$ 或 $\rho^-\to\pi^-\gamma$ 定出来的在量级上是符合的，但在量值上还有差

异．这些结果表明，矢量为主假定和广义形状因子为常数的假定一起虽然给出较好的结果，但还只是近似的，这近似性主要来源于哪一个假定则还有待进一步的理论研究来作出判断．

(3) 强子的光生实验

高能中性矢量介子的产生实验中观察到很强的衍射产生特征．这个现象可以用光子先转化成中性矢量介子，中性矢量介子再与核子作衍射散射来很好地加以解释．中性矢量介子的光生衍射产生现象是对矢量为主模型的重要支持．

(4) 电磁形状因子与电荷归一化

利用矢量为主模型讨论赝标介子的电磁形状因子和电荷归一化与内部 $SU(N)$ 味对称性的联系．利用前面给出的结果类似于对 π 介子电磁形状因子的讨论，得到赝标介子的电荷归一条件为：

$$f_{\pi^+}g'_\rho=e,$$

$$f_{K^+}\left(\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{6}g'_\omega+\frac{1}{3}g'_\varphi\right)=e,$$

$$f_{K^0}\left(-\frac{1}{2}g'_\rho+\frac{1}{6}g'_\omega+\frac{1}{3}g'_\varphi\right)=0,$$

$$f_{D^+}\left(\frac{1}{2}g'_\rho-\frac{1}{6}g'_\omega+\frac{2}{3}g'_J\right)=e,$$

$$f_{D^0}\left(-\frac{1}{2}g'_\rho-\frac{1}{6}g'_\omega+\frac{2}{3}g'_J\right)=0,$$

$$f_{F^+}\left(\frac{1}{3}g'_\varphi+\frac{1}{3}g'_J\right)=e,$$

其中 f_{π^+} 是指广义形状因子的两条赝标介子线是在 π^+ 介子质壳上，矢量介子线则一律与虚光子线联接，上式中还引入 $g_V=Q_Vg'_Vm_V^2$，Q_V 为矢量介子 V 的有效电荷，m_V 为矢量介子 V 的质量．各 Q_V 的值分别为

$$Q_\rho=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad Q_\omega=\frac{1}{3\sqrt{2}},\quad Q_\varphi=-\frac{1}{3},\quad Q_J=\frac{2}{3}.$$

要注意的是 g_V 以及 g'_V 作为 q^2 的函数现在都是取 $q^2=0$ 的值.

引入 g'_V 代替 g_V 的简便在于已分出去有效电荷项，这样不同的矢量介子 $g'_V=g'(q',m_V^2)$ 的差别可以看作函数 $g'(q^2,m_V^2)$ 中参量 m_V^2 取不同值而已. 在考虑电荷归一化时，q^2 可取任意值.

从上面的联立方程可以解出

$$f_{\pi^+}=f_{K^+}=f_{K^0}=f_{D^+}=f_{D^0}=f_{F^+}=f(q^2),$$

即 f 与赝标介子质量无关，只是 q^2 的函数

$$fg'_\rho=e,$$

$$\frac{1}{3}fg'_\varphi+\frac{2}{3}fg'_J=e,$$

$$\frac{2}{3}fg'_J-\frac{1}{3}fg'_\varphi=\frac{1}{3}fg'_\omega.$$

如果考虑到

$$m_\omega^2\approx m_\rho^2,$$

假定

$$g'_\rho=g'(q^2,m_\rho^2)=g'(q^2,m_\omega^2)=g'_\omega,$$

则立刻得

$$g'_\rho=g'_\omega=g'_\varphi=g'_J=g'(q^2),$$

即与矢量介子的质量无明显依赖关系.

但是另一方面，从矢量介子衰变为 e^+e^- 的实验来看表现出

$$g'^2(-m_V^2,m_V^2)=g'^2(q^2=-m_V^2,m_V^2)\propto m_V^{-1.11}$$

的经验规律. 如果接受

$$g'(q^2,m_V^2)=g'(q^2),$$

即对 m_V^2 无明显依赖关系的假定，则得

$$g'(q^2)=A(-q^2)^{-\frac{1.11}{4}},$$

其中 A 为一个与矢量介子质量无关的常数. 再利用电荷归一条件得到

$$f(q^2)=\frac{e}{g'(q^2)}=\frac{e}{A}(-q^2)^{\frac{1.11}{4}},$$

即在矢量粒子衰变为两个赝标介子时，耦合时的广义形状因子(即等效耦合系数)f应与矢量介子V的质量有依赖关系为

$$f(-m_V^2)=\frac{e}{A}m_V^{\frac{1.11}{2}}.$$

在前面讨论矢量介子的强衰变时，对于广义形状因子f(在前面记作g)作为三线质量的函数完全未知. 现在利用矢量为主模型讨论电荷归一化的要求得出：对于两个赝标介子线相同的情形，f^2与赝标介子的质量无关，但正比于矢量介子质量的1.11次幂. 这样完全给定了广义形状因子f的函数形式，可以用实验来验证这个结果，这个验证实际上也是对矢量为主模型的一个检验.

上面给出的$g'(q^2)=A(-q^2)^{-\frac{1.11}{4}}$还有很强的推论，这个广义形状因子在$q^2=0$时是奇异的. 然而$q^2=0$对应的是实光子，实际上这奇异性并不表现出来，这就要求矢量介子参与的顶点的广义形状因子中，要有一个相应的因子$(-q^2)^{\frac{1.11}{4}}$以消掉这奇异性. 这个推论显然是很强的.

从以上的讨论可以看出，矢量为主模型虽然是对强子的电磁相互作用机理的一种物理模型，但在许多问题中，实际上由这个模型很大程度确定下来广义形状因子的函数形式.

4. 夸克模型和Zweig规则

在夸克模型中，原则上可以用统一的观点来导出各种过程的等效相互作用. 夸克模型中有关这方面的物理图象为：

(1) 强子由夸克(和反夸克)组成，几种夸克满足一定的对称性，强子的对称性是由组成它的夸克的对称性所决定；

(2) 夸克(反夸克)之间通过强相互作用结合成强子，这种结合可以用相对论协变的波函数来描写.

(3) 强子间的相互作用都可归结为夸克(反夸克)之间的相互作用.

这样夸克模型实际上把强子间等效相互作用形状因子都归结为强子与夸克的顶点. 但是实际问题中在于难于找到准确地描写强子结构的波函数，因此实际运用夸克模型讨论时总还要考虑加某些物理假定作为近似处理的依据.

在利用夸克模型处理问题时，唯象的 Zweig 规则起了重要作用. Zweig 规则是说:如果强相互作用过程的 Feynman 图只保留夸克线时自动分成相互分开的两部分，则这个 Feynman 图所代表的过程受到压低. 例如 ω 和 φ 都是 $J^{PC}=1^{--}$ 的介子，φ 的质量比 ω 重，按一般推测，既然 $\omega\longrightarrow\pi^+\pi^-\pi^0$ 是 ω 的主要衰变方式，则 $\varphi\longrightarrow\pi^+\pi^-\pi^0$ 的衰变部分宽度应该更大，然而实际上 $\Gamma(\omega\to\pi^+\pi^-\pi^0)=(7.48\pm0.10)$ MeV，$\Gamma(\varphi\to\pi^+\pi^-\pi^0)=(0.65\pm0.06)$ MeV. 这个出乎意料的现象在早期强子分类中曾经作为一个非常重要的事实引起注意. 后来在强子结构模型内给以自然的解释: φ 由夸克 s 和 $\bar{s}$ 组成，但 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 中既无 s 也无 $\bar{s}$，因此这个衰变过程只能通过 Zweig 禁戒的 Feynman 图来进行.

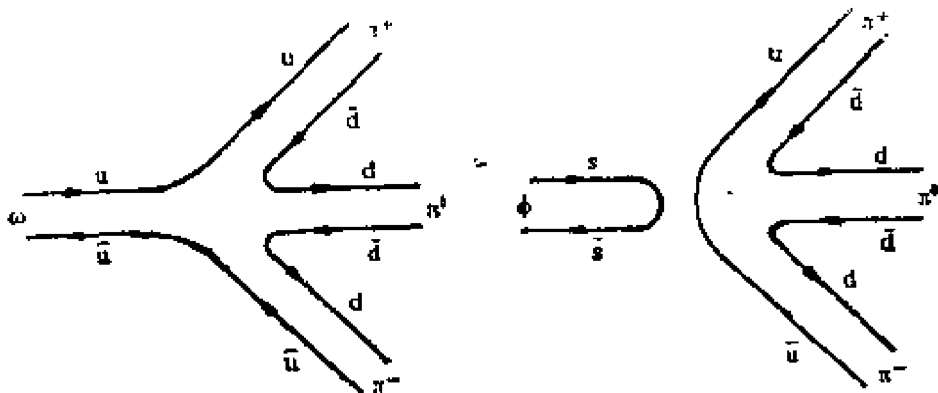


图 8.7 Zweig 规则的 Feynman 图

Zweig 规则作为一个唯象规律，很好地得到有关实验的检验.

把 Zweig 规则运用到等效相互作用分析中即相当于某一些等效相互作用项的广义形状因子的值被压低。现在需要确定哪类等效相互作用项受到压低。

Zweig 禁戒的 Feynman 图中分开的两部分既然无夸克线相联，因此在味 $SU(N)$ 中，两部分分别组成 $SU(N)$ 标量；另外既然两部分图中无夸克线相联，当然也不会有重子线穿过去。由此得到下述补充规则：

(1) 重子场量和反重子场量必须在同一个阵迹项中。

(2) 由不止一个阵迹项组成的不变量，受到 Zweig 规则的压低。一般说来，如果等效相互作用由分类为 n 行的杨图描写，则相应的广义形状因子受 $n-1$ 次 Zweig 压低。

根据上述原则的限制，如果在等效相互作用分析中，只考虑 Zweig 允许过程，则独立的等效相互作用项数会大大地减少。这个规则在等效相互作用分析中是很重要的规则。

§8.8 J^{PC} = 偶$^{++}$和奇$^{--}$纯中性强子的对称性

从理论上来看，J^{PC} = 偶$^{++}$和奇$^{--}$的纯中性强子可能是一对正反价夸克所组成的介子，可能是由几个价胶子所组成的胶球，也可能是由一对正反价夸克和一个价胶子所组成的混杂子，还可能是由两对正反价夸克所组成的四夸克态。实验上已经发现了多个这类纯中性强子，需要研究这类纯中性强子的对称性质，讨论分析和辨认这类粒子的判定性特征。

一类重要的常见的衰变是 J^{PC} = 偶$^{++}$和奇$^{--}$纯中性强子 X 衰变到两个赝标介子($J^P=0^-$)的衰变。X 粒子的场量 $X_{\mu\nu\cdots\lambda}$ 有 J 个 Lorentz 附标，并满足如下的附加条件：

(1) $X_{\mu\nu\cdots\lambda}$ 对各 Lorentz 附标完全对称；

(2) $g^{\mu\nu}X_{\mu\nu\cdots\lambda}=0$，无迹条件；

(3) $\partial^{\mu} X_{\mu\nu\cdots\lambda}=0$, Lorentz 条件.

这个衰变过程的等效相互作用为

$$gX_{\mu\nu\cdots\lambda}(\partial_{+}^{\mu}-\partial_{-}^{\mu})(\partial_{+}^{\nu}-\partial_{-}^{\nu})\cdots(\partial_{+}^{\lambda}-\partial_{-}^{\lambda})P^{+}P^{-},$$

这是满足所有对称性要求的最普遍的表达式，只有独立的一项. 其中 ∂_{+}^{μ} 和 ∂_{-}^{μ} 分别表示对场量 P^{+} 和 P^{-} 的偏微商，g 为等效耦合常数. 根据这个等效相互作用，给出这个衰变过程的轨道角动量 $L=J$，并给出这个衰变过程的部分宽度为

$$\Gamma=\eta\alpha\frac{k^{2J+1}}{m^{2J}},$$

其中 m 是 X 粒子的质量，k 是在 X 粒子静止系中末态赝标介子的衰变动量，$\alpha=g^{2}/4\pi$，η 是一个无量纲的数，计算给出

$$\eta=\frac{8^{J}(J!)^{2}}{2(2J+1)!},$$

对于 $J=0,1,2,3,4,5,6,\cdots$，η 的值分别为 0.5000, 0.6667, 1.0667, 1.8286, 3.2508, 5.9105, 10.912, $\cdots$.

若 $J^{PC}=$ 偶$^{++}$和奇$^{--}$纯中性强子 X 的同位旋为 0 或 1，则它衰变到两个赝标介子时允许的末态分别如下：

$I^{G}=0^{+}$, $J^{PC}=$ 偶$^{++}$, $\pi^{+}\pi^{-}$, $\pi^{0}\pi^{0}$, $K^{+}K^{-}$, $K_{L}K_{L}$, $K_{S}K_{S}$ $\eta\eta$, $\eta\eta'$, $\eta'\eta'$;

$I^{G}=1^{-}$, $J^{PC}=$ 偶$^{++}$, $K^{+}K^{-}$, $K_{L}K_{L}$, $K_{S}K_{S}$;

$I^{G}=0^{-}$, $J^{PC}=$ 奇$^{--}$, $K^{+}K^{-}$, $K_{L}K_{S}$;

$I^{G}=1^{+}$, $J^{PC}=$ 奇$^{--}$, $\pi^{+}\pi^{-}$, $K^{+}K^{-}$, $K_{L}K_{S}$.

四种情况各不相同，这可以作为区分它们的一个判据. 如果判别了 X 粒子属于哪一种情形，还可以根据实验测得的部分宽度倒推等效耦合常数的值. 这个值随 X 粒子的自旋不同而不同，很敏感地依赖于 X 粒子的自旋值. 令 $r=k/m$，显然 r 的最大值小于 0.50. 对于 $J^{PC}=$ 偶$^{++}$情形，在 X 粒子的自旋值取 0, 2, 4, $\cdots$时，

利用 r 的最大值，由部分宽度定出等效耦合常数值变化的倍数至少分别为 1:7.5:39.375:…，差别是明显的．对于 J^{PC}＝奇$^{--}$情形，在 X 粒子的自旋值取 1，3，5，…时，利用 r 的最大值由部分宽度定出等效耦合常数值变化的倍数至少分别为 1:5.833:28.875:…，差别也是明显的．由于有这个显著的差别，可以根据哪个自旋值在物理上是合理的来对 X 粒子自旋的可能取值提供有利的信息．

作为一个例子，考虑前面讨论过的 ρ 介子，对称性的分析已经给出 ρ 介子是 J^{PC}＝奇$^{--}$的粒子，利用实验给出的宽度，可以反过来推出各种可能的自旋值对应的等效耦合常数值，结果如下表所示：

J	1	3	5
a	2.94	22.7	149

从这个结果来看，显然只有 $J=1$ 时等效耦合常数的量级是合理的，这虽然不能作为确定 $J=1$ 的判定性根据，但可以说它支持 $J=1$ 的可能性．也就是说，从等效相互作用的量级来看，ρ 介子是 $J=1$ 的粒子的可能性最大．

§8.9 J/ψ 辐射衰变的对称性

J/ψ 粒子是 $I^G=0^-$，$J^{PC}=1^{--}$ 的普通介子，其质量为 $m=(3096.93\pm0.09)$MeV，宽度为 $\Gamma=(68\pm10)$keV．J/ψ 粒子是由 c 夸克和 $\bar{c}$ 夸克作为价夸克所组成，由于含 c 夸克的最轻的介子是 D^0 介子，其质量为 $m=(3096.93\pm0.09)$MeV，因此 J/ψ 粒子不可能通过强相互作用衰变成 $D^0\bar{D}^0$．J/ψ 粒子的各种衰变方式中，只有辐射衰变 $J/\psi\to\gamma\eta_c$ 把 c 夸克和 $\bar{c}$ 夸克保持到末态中去．除此之外，不论 J/ψ 粒子通过哪种相互作用衰变，组成 J/ψ 粒子的

价夸克 c 和 $\bar{c}$ 都应被湮没掉. 在 J/ψ 粒子的各种衰变方式中，辐射衰变 J/ψ→γX 特别引起人们的注意. 如果 X 不是 η_c 而是另一种粒子，则它将再衰变为若干个末态粒子. J/ψ 粒子的这个辐射过程的机理可能是 J/ψ 粒子中的 c 夸克和 $\bar{c}$ 夸克湮没为一个光子和两个胶子，两个胶子再通过相互作用变为 X 粒子. 这样的辐射衰变的 Feynman 图如图 8.8 所示，其中X粒子可能是一个介子，也可能是一个双胶子胶球，还可能是一个 4 夸克态. J/ψ 粒子的这个辐射过程的另一种可能机理是 J/ψ 粒子中的 c 夸克和 $\bar{c}$ 夸克湮没为三个胶子，胶子再通过相互作用变为正反夸克，这些正反夸克辐射出光子，然后演化形成为 X 粒子. 这样的机理所得到的 X 粒子同样可能是一个介子，也可能是一个双胶子胶球，还可能是一个 4 夸克态. 一般说来，前一种机理的贡献大于后一种机理的贡献.

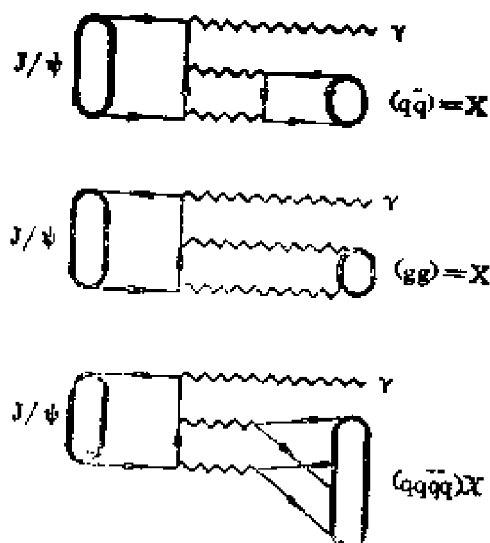


图 8.8　J/ψ→γX 的 Feynman 图

对于 J/ψ 粒子辐射衰变中末态粒子 X 的性质可以通过 J/ψ→γX 的对称性分析和X粒子的衰变行为结合起来综合分析给出.

1. X粒子的可能的量子数

由于光子的 $J^{PC}=1^{--}$，从 J/ψ→γX衰变过程看，X粒子的C

宇称应为正．如果衰变轨道角动量是 S 波，则X粒子的自旋宇称应为 $J^P=0^+,1^+$ 或 2^+；如果衰变轨道角动量是 P波，则X粒子的自旋宇称应为 $J^P=0^-,1^-,2^-$ 或 3^-．需要考察X粒子的自旋宇称取这些值时 $J/\psi\to\gamma X$ 衰变过程的等效相互作用的普遍形式．为了简便，在动量表象下来给出等效相互作用的普遍形式，粒子的极化矢量仍用相应的场量来描写．J/ψ 粒子的四维动量用 p_μ 表示，X粒子的四维动量用 p'_μ 表示，光子的四维动量用 q_μ 表示．

2．X粒子 $J^{PC}=0^{++},1^{++},2^{++}$，$0^{-+}$，$1^{-+}$ 时的等效相互作用

$J^{PC}=0^{-+}$ 时X粒子的场量为 X，等效相互作用普遍可表为

$$g_1X(q\psi)(pA)+g_2X(A\psi),$$

其中括弧的含义是 Lorentz 内积，例如 $(q\psi)=q_\mu\psi^\mu$，g_1 和g_2 是广义形状因子，即耦合常数．电磁场的规范不变性要求在等效相互作用中将 A 用 q 代入后自动得零．这个要求给出等式

$$g_1(pq)+g_2=0.$$

这样等效相互作用最后可普遍表为

$$gX[(q\psi)(pA)-(pq)(A\psi)],$$

只有 1 个耦合常数．

$J^{PC}=1^{++}$ 时X粒子的场量为 $X_{\mu\nu}$，它满足下列附加条件：

(1) $X_{\mu\nu}=-X_{\nu\mu}$；

(2) $\partial^\mu X_{\mu\nu}=0$．

等效相互作用普遍可表为

$$g_1(pA)(\psi Xq)+g_2(q\psi)(qXA)+g_3(\psi XA),$$

其中三个量的括弧的含义是将这三个物理量的 Lorentz 指标按顺序收缩所得的标量．例如 $(\psi XA)=\psi^\mu X_{\mu\nu}A^\nu$，$g_1,g_2$ 和 g_3 是广义形状因子，即耦合常数．电磁场的规范不变性要求给出等式

$$g_1(pq)+g_3=0.$$

这样等效相互作用最后可普遍表为

$$g_1[(pA)(\psi Xq)-(pq)(\psi XA)]+g_2(q\psi)(qXA),$$

只有两个独立的耦合常数.

$J^{PC}=2^{++}$ 时 X 粒子的场量为 $X_{\mu\nu}$，它满足下列附加条件:

(1) $X_{\mu\nu}=X_{\nu\mu}$;

(2) $\partial^{\mu}X_{\mu\nu}=0$;

(3) $g^{\mu\nu}X_{\mu\nu}=0$.

等效相互作用普遍可表为

$$g_1(pA)(\psi Xq)+g_2(q\psi)(qXA)$$
$$+g_3(pA)(q\psi)(qXq)+g_4(\psi XA)+g_5(A\psi)(qXq),$$

其中出现 5 个耦合常数 g_1,g_2,g_3,g_4 和 g_5. 电磁场的规范不变性要求给出等式

$$g_1(pq)+g_4=0;$$
$$g_2+g_3(pq)+g_5=0.$$

这样消去 g_4 和 g_5，等效相互作用最后可普遍表为

$$g_1[(pA)(\psi Xq)-(pq)(\psi XA)]$$
$$+g_2[(q\psi)(qXA)-(A\psi)(qXq)]$$
$$+g_3[(pA)(q\psi)-(pq)(A\psi)](qXq),$$

其中独立的耦合常数只有 3 个.

$J^{PC}=0^{-+}$ 时 X 粒子的场量为 $X_{\mu\nu\lambda\sigma}$，它满足的附加条件是对四个 Lorentz 指标完全反对称. 等效相互作用普遍可表为

$$g(Xp\psi qA).$$

其中五个量的括弧的含义是

$$(Xp\psi qA)=X_{\mu\nu\lambda\sigma}p^{\mu}\psi^{\nu}q^{\lambda}A^{\sigma}.$$

独立的耦合常数只有 1 个，电磁场的规范不变性的要求自动满足.

$J^{PC}=1^{-+}$ 时 X 粒子的场量为 $X_{\mu\nu}$，它满足下列附加条件:

(1) $X_{\mu\nu}=-X_{\nu\mu}$;

(2) $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_{\lambda}X_{\mu\nu}=0$.

等效相互作用普遍可表为

$$g_1(pA)(\psi Xq)+g_2(q\psi)(qXA)+g_3(q\psi)(pXA)$$
$$+g_4(pA)(q\psi)(pXq)+g_5(\psi XA)+g_6(A\psi)(pXq)$$
$$+g_7(pA)(\psi Xp),$$

其中出现 7 个耦合常数. 电磁场的规范不变性要求给出等式

$$g_1(pq)+g_5=0;$$
$$g_3+g_4(pq)+g_6=0;$$
$$g_7=0.$$

这样等效相互作用最后可普遍表为

$$g_1[(pA)(\psi Xq)-(pq)(\psi XA)]+g_2(q\psi)(qXA)$$
$$+g_3[(q\psi)(pXA)-(A\psi)(pXq)]$$
$$+g_4[(pA)(q\psi)-(pq)(A\psi)](pXq),$$

只有 4 个独立的耦合常数.

§8.10 强子产生中味对称性的破缺

在高能粒子碰撞中会产生大量的强子,并且其中主要是介子. 强子产生时是通过色相互作用实现的. 色相互作用的媒介粒子是胶子,胶子有 8 种,它们是色 $SU(3)$定域规范场的规范粒子, 属于色 $SU(3)$群的正规表示. 高能相互作用下, 胶子可以转化为一对正反夸克,夸克属于色 $SU(3)$群的表示 **3**,反夸克属于色 $SU(3)$群的表示 $\mathbf{3}^*$. 夸克和反夸克碰撞时又可以形成一个属于色 $SU(3)$群的表示 **1** 的系统, 即结合成一个介子. 三个夸克也可以结合形成一个属于色 $SU(3)$群的表示 **1** 的系统,即结合成一个重子. 三个反夸克也可以类似地结合形成一个反重子. 色对称性和味对称性是互相独立的,从味 $SU(3)$群对称性来看,色相互作用属于味$SU(3)$群的表示 **1**. 这样在高能碰撞时大量粒子产生时, 相当于从真空中激发出粒子,等效相互作用必需满足色 $SU(3)$群和味 $SU(3)$ 群

以及 Lorentz 变换不变性的要求.

考察赝标介子的产生，满足色 $SU(3)$ 群和味 $SU(3)$ 群以及 Lorentz 变换不变性的等效相互作用正比于

$$\mathrm{Tr}(M_{\mu\nu\lambda\sigma}M^{\mu\nu\lambda\sigma}),$$

这里是赝标介子在味 $SU(3)$ 群中的表示矩阵. 这在物理上要求所有粒子都是与反粒子一起成对产生，以保证所有的守恒定律都能自动满足. 按照这个相互作用给出各粒子对产生时的相对比例为

$\pi^+\pi^-$	$\pi^0\pi^0$	K^+K^-	$K^0\bar{K}^0$	$\eta\eta$	$\eta\eta'$	$\eta'\eta'$
2	1	2	2	1	0	1

然而实际上高能碰撞时，各种粒子产生的相对比例远离这个比例. 物理上一个可能的原因是因为 s 夸克的质量比 u 夸克和 d 夸克都重得多，因此尽管相互作用耦合常数相同，产生一对 $s\bar{s}$ 比产生一对 $u\bar{u}$ 或 $d\bar{d}$ 困难得多，这样在等效相互作用中就要能体现这种运动学带来的对称性破缺.

引入矩阵 Λ 来描写这种对称性破缺，Λ 定义为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

其中 λ 为描述 $s\bar{s}$ 夸克对产生受抑制的因子. $\lambda=1$ 时表示味对称性没有破缺. 当有破缺时 $\lambda<1$.

等效相互作用应修改为正比于

$$\mathrm{Tr}(M_{\mu\nu\lambda\sigma}\Lambda M^{\mu\nu\lambda\sigma}\Lambda),$$

这里出现两个 Λ 矩阵，反映了每一对正反夸克对产生时都有这个抑制作用. 将上式展开后得到各种粒子产生的相对比例随 λ 值的不同而不同，并且 $\eta\eta$, $\eta\eta'$, $\eta'\eta'$ 道的产额还与赝标介子的味 $SU(3)$ 群 1+8 混合的混合角有关. 上述等效相互作用给出的各种介子产生矩阵元平方的相对比例随 λ 值的变化如图 8.9 所示，其中赝

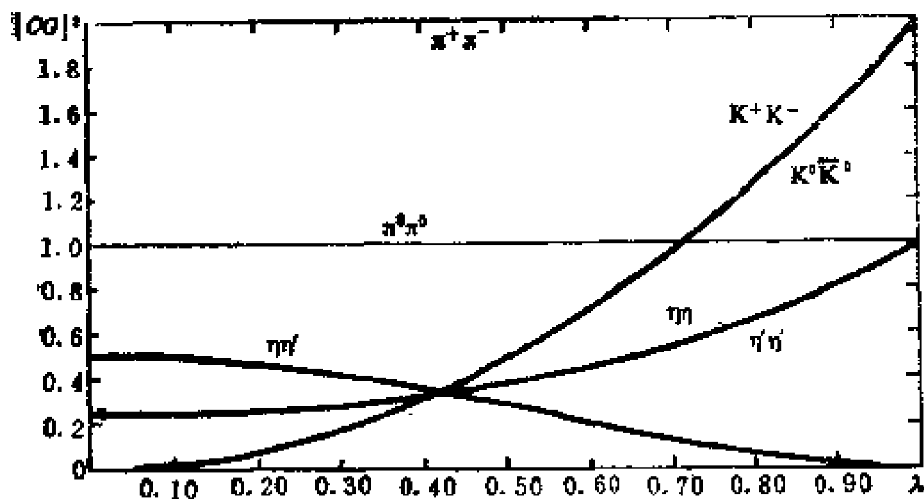


图 8.9 介子产生矩阵元平方随 λ 值的相对变化

标介子的味 $SU(3)$ 群 1－8 混合的混合角取作 $\theta=-10^{\circ}$. 当然和实验的结果比较时还要考虑相空间的效应.

这种整体味对称性的破缺在胶球的衰变中非常重要. 胶球是只有价胶子没有价夸克的强子，它既是色单态又是味单态. 从内部量子数来看，胶球和真空量子数是相同的. 考虑 $J^{PC}=0^{++}$ 和 2^{++} 的双胶子胶球 G_0 和 G_2，它们的场量分别用 G 和 $G_{\mu\nu}$ 表示. 它们衰变为一对赝标介子的等效相互作用分别为

$$g_0 G\mathrm{Tr}(M_{\mu\nu\lambda\sigma}\Lambda M^{\mu\nu\lambda\sigma}\Lambda),$$

$$g_2 G_{\rho\tau} q^{\rho} q^{\tau}\mathrm{Tr}(M_{\mu\nu\lambda\sigma}\Lambda M^{\mu\nu\lambda\sigma}\Lambda),$$

其中 q^{ρ} 是末态两个赝标介子四维动量之差. 它们衰变的部分宽度分别为

$$\Gamma=\frac{g_0^2}{8\pi}|C|^2 k,$$

$$\Gamma=\frac{4g_2^2}{15\pi}|C|^2\frac{k^5}{m^4},$$

其中 k 为在胶球静止系中末态赝标介子的衰变动量，m 为胶球质量，系数 C 由等效相互作用中的求迹给出. $J^{PC}=0^{++}$ 和 2^{++} 的双胶子胶球各衰变道的相对分支比随胶球质量的变化如图 8.10—

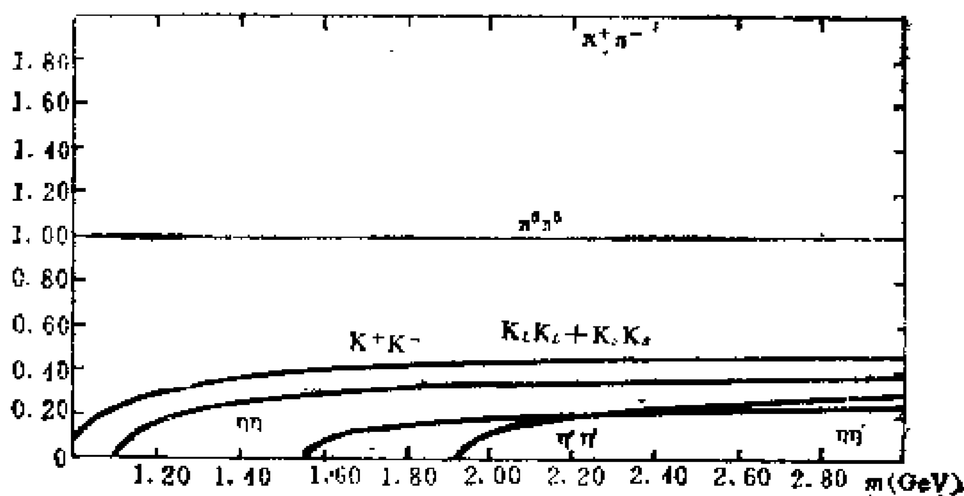


图 8.10　$\lambda=0.5$ 时 $J^{PC}=0^{++}$ 胶球衰变相对分支比

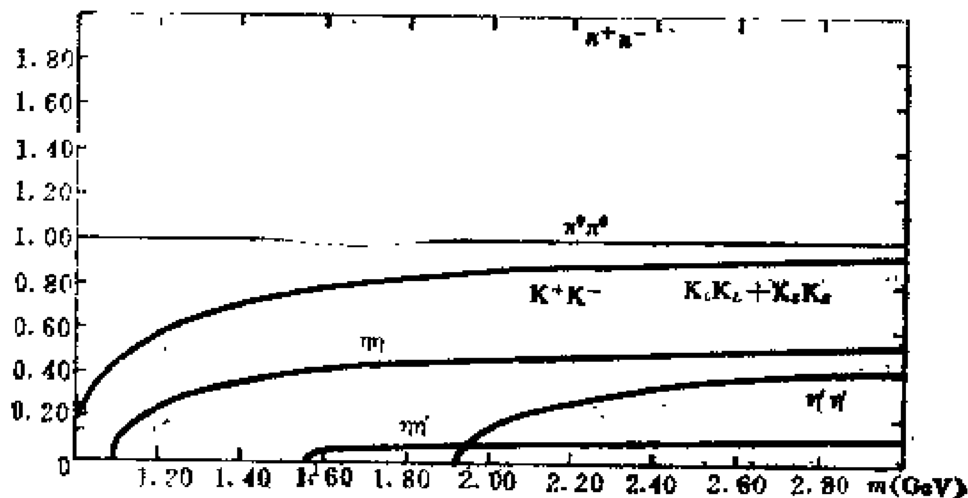


图 8.11　$\lambda=0.7$ 时 $J^{PC}=0^{++}$ 胶球衰变相对分支比

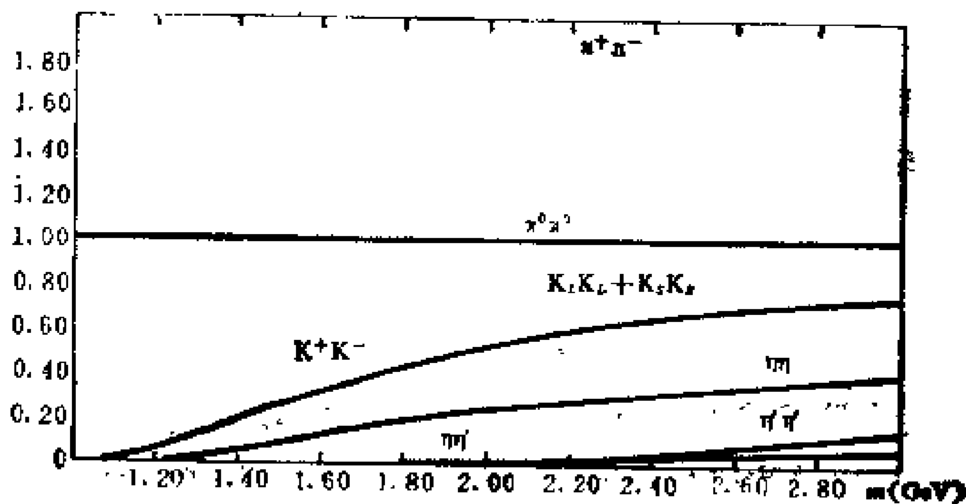


图 8.12　$\lambda=0.7$ 时 $J^{PC}=2^{++}$ 胶球衰变相对分支比

图 8.12 所示．现有强子多粒子产生现象和强子物理的研究显示 λ 的取值应为 $\lambda^2=0.3-0.5$，这些图中取 $\lambda=0.5$ 和 0.7 反映了这个范围．

一个粒子的衰变概率由该粒子衰变到所有道的部分宽度之和来描写．理论上，计算部分宽度是把粒子衰变概率对末态相空间积分．当考虑衰变过程的对称性破缺时，破缺的效应既表现在衰变到该道某一末态的概率上，也会表现在对末态相空间的积分上．对末态相空间的积分直接与初态和末态粒子的质量有关．当粒子的质量直接用物理上观察到的质量值代进去时，得到的自动是包括了全部对称性破缺效应的结果．对衰变到该道某一末态的概率的计算上，可以类似于对质量分裂的讨论，给出各级对称性破缺效应的表述．

考虑 $J^{PC}=1^{--}$ 介子到两个 $J^{PC}=0^{-+}$ 介子的衰变，利用场论计算给出衰变的部分宽度可以表为

$$\Gamma=\alpha C^2\frac{2p^3}{3m^2},$$

其中 α 为等效耦合常数，m 为初态粒子的质量，p 为在初态粒子静止系中末态粒子的衰变动量，C 正比于由 $SU(3)$ 对称性要求所决定的 C G 系数．利用实验上观测到的粒子的宽度和某一衰变道的分支比，可以得到粒子对该衰变道的部分宽度，从而可以反过来定出等效耦合常数 α．若对称性破缺的零级效应就是足够好的近似，从各衰变过程中定出的等效耦合常数 α 应取相同的值．$\rho\to\pi\pi$，$\phi\to K^+K^-$，$\phi\to K^0\bar{K}^0$，$K^*\to K\pi$ 这 4 个衰变过程的 C^2 值分别为 2，0.906，0.906，1.5，从而定出的等效耦合常数 α 的值分别为 1.43，1.83，1.96，1.66．这表明对称性破缺的零级效应可以看作是较好的近似．如果考虑对称性破缺的一级效应，和讨论胶球的方法类似，还要在等效相互作用中加进一个反映破缺的矩阵，其中引入

一个描述破缺程度的参量 ε，它的物理意义是对称性破缺的相互作用和对称性不破缺的相互作用之比．这时上面定出的耦合常数 α 不再取相同的值，满足关系：

$$\alpha_\rho = \alpha_0, \quad \alpha_{K^*} = \alpha_0\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon\right)^2, \quad \alpha_\phi = \alpha_0[1+(2+\sqrt{2}\tan\theta)\varepsilon]^2,$$

其中 θ 为 $J^{PC}=1^{--}$ 介子的混合角．如果以 ρ 介子和 K^* 介子的耦合常数作为输入，则可以定出 $\varepsilon=0.0516$．再利用混合角 $\theta=39°$，可以给出 $\alpha_\phi=1.93$，计算值和实验值符合得相当好．

第九章 定域规范不变性

§9.1 定域规范群

1. 定域规范变换与规范场

考虑描写内部对称性的群 G，群元素由群参数 α_i 描写，其中 $i=1,\cdots,m$. 对于 $SU(N)$ 群，$m=N^2-1$. 群的生成元 I_i 构成李代数，如果 I_i 的表示矩阵为 L_i'，则群元素 $g(\alpha^i)=e^{i\alpha^i I_i}$ 的表示矩阵为 $e^{i\alpha_i I_i}$. 如果标志变换的群参数 α^i 是时空点的函数 $\alpha^i(x)$，则群称为定域规范群. 例如，如果这个群是某种转动群，则定域性表现为在不同时空点的转角可以不同. 显然，从这个几何含意就可以明显看出，群 G 定义的空间必须是与 Lorentz 时空正交的某种内部空间.

在定域规范群的作用下，由于群的定域性带来变换性质的描写上有一定变化:

场量 ψ 的变换规律仍为

$$\psi\to e^{i\alpha^i L_i}\psi,$$

但是场量的微商项变换规律则改为

$$\begin{aligned}\partial_\mu\psi\to\partial_\mu(e^{i\alpha^i L_i}\psi)&=(\partial_\mu e^{i\alpha^i L_i})\psi+e^{i\alpha^i L_i}(\partial_\mu\psi)\\&=e^{i\alpha^i L_i}[\partial_\mu+e^{-i\alpha^i L_i}(\partial_\mu e^{i\alpha^i L_i})]\psi.\end{aligned}$$

如果是整体规范变换，则在上式中无最后一项，这时 $\partial_\mu\psi$ 和 ψ 的变换规律完全相同. 但是对于定域变换，则相当于在作变换时，算符 ∂_μ 的形式也要同时作变换

$$\partial_\mu\to\partial_\mu+e^{-i\alpha^i L_i}\partial_\mu e^{i\alpha^i L_i},$$

这样才可以把 $\partial_\mu\psi$ 的变换规则与 ψ 的变换规则对应起来.

然而算符 ∂_μ 的上述变换会出现明显的规范依赖项，这就使规范不变性难以保持．为了保持定域规范不变性，引入规范场 A^i_μ，$i=1,\cdots,m$，其变换规律为

$$L_j A^j_\mu \rightarrow e^{i\alpha^i L_i}\left(L_j A^j_\mu + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)e^{-i\alpha^i L_i}.$$

再引入协变微商

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igA^j L_j$$

来代替 ∂_μ，则在群 G 的作用下：

$$D_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha^i L_i}D_\mu\psi,$$

即 $D_\mu\psi$ 的变换规则形式上和 ψ 的完全一致了．这样自然保持了规范不变性．

2．定域规范变换的一些特点

(1) 定域规范不变性的要求高于整体规范不变性的要求．事实上，如果一个系统满足定域规范不变性，必满足相应的整体规范不变性．如果群参数 $\alpha^i(x)$ 取作不随时空点而改变，则定域规范变换就还原到它的一个特殊情形，即整体规范变换．

正因为如此，定域规范变换不变性给出的一些要求，在整体规范变换下并不是必需的要求．例如，定域规范变换不变性要求存在规范场；规范场与所有粒子的耦合形式都是完全确定的，并且耦合常数相同；规范场的质量为零；……等．

(2) 守恒律．根据 Noether 定理，规范变换不变性决定了存在一些守恒量，即规范变换的生成元．对于整体规范变换不变性，这些守恒荷的主要特征是可以从实验上检验其守恒性．但是对于定域规范变换不变性，这些守恒荷还具有相互作用中起耦合常数的作用，它有动力学的观察效果．作为典型例子对比：电荷是一个定域 $U(1)$ 规范变换的守恒荷，它起电磁相互作用的耦合常数的作用，可以利用这个性质直接测量电荷；然而奇异数则是一个整体

$U(1)$规范变换的守恒荷，它并没有类似于电荷那样的动力学性质.

(3) 定域规范变换不变性要求引入规范场 A_μ^i，规范场分量的个数就是群参数的个数，并且规范场构成规范群的一个正规表示. 规范变换的不变性要求规范场的质量为零，这是因为拉氏量中如果引入了规范场的质量项 $m^2 A_\mu^i A_i^\mu$，则一定破坏定域规范不变性.

(4) 在上面给出规范场的变换规则

$$L_j A_\mu^j \to e^{i\alpha^i L_i}\left(L_j A_\mu^j + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)e^{-i\alpha^i L_i}$$

是通过某一个具体表示给出的，实际上，这里给出的 A_μ^j 的变换规律是与表示的选取无关的. 为了表明这点，在上式右边取无穷小变换，令 α^i 为小量，并只取到一级项则为

$$L_j A_\mu^j \to L_j A_\mu^j + \frac{1}{g}L_j(\partial_\mu \alpha^j) + i\alpha^k A_\mu^i (L_k L_i - L_i L_k).$$

利用生成元的李代数关系在这表示中的表达式

$$L_k L_i - L_i L_k = iC_{kij} L_j$$

代入，则实际上可提出上式中的 L_j，从而得到

$$A_\mu^j \to A_\mu^j + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^j - C_{kij}\alpha^k A_\mu^i,$$

这是与表示无关的.

由此得到，关于规范场量 A_μ^i 的变换规则，可以根据需要在任何表示中通过生成元的表示矩阵写出. 在考虑整体规范变换时，曾经对一表示生成元 L_i 引入另一组 $L_i^{(\epsilon)}$

$$L_i^{(\epsilon)} = \begin{cases} L_i & \text{当 } L_i \text{ 为虚矩阵时} \\ L_i \epsilon & \text{当 } L_i \text{ 为实矩阵时,} \end{cases}$$

只要 $\epsilon^2 = 1$，则 $L_i^{(\epsilon)}$ 仍然满足与 L_i 相同的代数关系. 从上面关于定域规范场变换关系与表示无关的证明可以看出，规范场的变换关系也可以通过 $L_i^{(\epsilon)}$ 给出，只要在上面的式子中把所有的 L_i 换成

相应的 $L_i^{(r)}$就行了.

§9.2 Abel 规范场和非 Abel 规范场

在下面为了讨论简便引入符号

$$U=e^{i\alpha^i L_i},\quad A_\mu=A_\mu^i L_i,$$

则规范场的变换规则可表为

$$A_\mu\to U\left(A_\mu+\frac{i}{g}\partial_\mu\right)U^{-1},$$

其中 g 是耦合常数，和规范场的变换直接相联系．规范场的引入是定域规范不变性所要求的，是补偿对各种场的微商项的不变性所需要的．尽管各种场所属的表示可以不同，但所需要的规范场是统一的，并且各种场与规范场耦合的形式都由定域规范不变性所完全决定，其耦合常数也是统一的.

这些性质对 Abel 规范场和非 Abel 规范场都是一样的．Abel 场和非 Abel 场的差别最主要表现在规范场的自相互作用上，拉氏量中规范场的动能项为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})=-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu},$$

其中规范场的协变微商 $F^i_{\mu\nu}$ 为

$$F^i_{\mu\nu}=\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu+gC_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu,$$

$F^i_{\mu\nu}$ 的形式决定了拉氏量中动能项在定域规范变换下不变.

对于 Abel 规范场，$C_{ijk}=0$，$F_{\mu\nu}$ 中只含 A_μ 的一次项，从而 $\mathscr{L}$ 中动能项是 A_μ 的二次齐次式，运动方程是 A_μ 的线性方程．对于非 Abel 规范场，$C_{ijk}\neq0$，$F_{\mu\nu}$ 中包含 A_μ 的一次项和二次项，从而 $\mathscr{L}$ 中动能项中包含 A_μ 的二次、三次和四次项，这样运动方程中包含 A_μ 自己对自己的相互作用项，它表现为规范场量的三线顶点和四线顶点，其耦合常数分别为 g 和 g^2.

换言之，Abel 规范场和非 Abel 规范场的差别就在于前者无自作用而后者有自作用．非 Abel 规范场自作用的形式是完全确定的，耦合常数也是完全由 g 决定．当然也必须注意到，对于非 Abel 规范场中任一个确定的分量来说，它也是没有自作用的．非 Abel 规范场有自作用是对规范场各分量的总合，即是对于整个规范场正规表示而言的．

对于 Abel 规范场，由于没有自作用项，如果我们对耦合常数 g 作一个标度变换 $g \to \lambda g$，则只相应于场量作一个相反的标度变换．从物理上说，这相当于对于电磁相互作用，基本电荷单位如取作 e(电子电荷)，则电子的电荷数为 1，如果基本电荷单位取作 $e/3$，则电子的电荷数为 3．由于光子不带电，因此从光子本身并不提供基本电荷单位的信息．换言之，对于 Abel 规范场，耦合常数 g 在一定意义下是相对的，可以允许作标度变换．

然而对于非 Abel 规范场，由于有自作用项，就提供一个自然标准来确定耦合常数的基本单位．从物理上来说，例如 $SU(3)_c$ 的色相互作用，规范粒子——胶子本身就带有色荷，它自然成为色荷的基本单位．因此在一定意义下，非 Abel 场的耦合常数 g 是有绝对意义的．这是 Abel 规范场和非 Abel 规范场之间差别的一个重要表现．

§9.3 三角反常

1. 三角反常的物理影响

三角反常的问题是在场论研究中提出来的，典型的如图 9.1 所示，图中实线是费米子线，外线是三条规范场线．如果这些规范场都是光子，按照量子电动力学，这个圈图应得零．即使是非 Abel 规范场，如果三个顶点都是纯矢量耦合，则这个图可以通过重整化方法来处理．但是如果这三个顶点中，有奇数个顶点是轴矢量耦

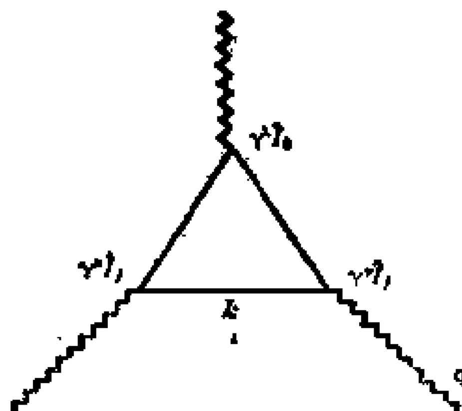


图 9.1　三角反常

合，则情况将完全不同.

在这种情况下，三角图将完全发散，用重整化方法处理时也会遇到麻烦．重整化处理时最常用的是维数正规化的方法，把四维时空的维数延拓到复平面，这时发散性就表现为在维数复平面上维数等于 4 处出现极点，而在维数取其它值时并不发散，重整化可以通过对极点的处理来实现．但是对于顶点含 γ_5 的三角图，由于 γ_5 的存在，使维数延拓不能实现，因此在作重整化处理时会遇到麻烦.

即使重整化问题用别的途径处理，但是由于轴矢流 Ward 等式不再成立，从而导致幺正性发生问题．这个问题是一个基本问题，是与场论得以成立的基本要求相联系的，这就对一切基本性的场论理论提出一个基本要求：理论中必须没有反常．也就是说，理论中所包含的全部费米子对三角反常的贡献之和必须为零，即全部互相抵消掉.

要想使理论中不出现反常是很困难的．实际上重要的是在理论中设法使反常全部消掉．是否保证消除反常已成为一个理论得以成立的必要条件之一．对于三角反常及其消除方法在许多文献中已有详细的讨论，下面我们着重看一下消除反常在群论计算中

提出了哪些要求.

2. 三角反常的描述

三角图的 Feynman 振幅为

$$S_{\lambda\mu\nu}(p, q) = (2\pi)^{-4}\int d^4k \mathrm{TrSp}[\gamma^\lambda L_k^{(\epsilon)}(\gamma, q+k)$$

$$\cdot\gamma^\nu L_j^{(\epsilon)}(\gamma, k)\gamma^\mu L_i^{(\epsilon)}(\gamma, k-p)]\cdot[(q+k)^2k^2(p-q)^2]^{-1},$$

这里 Tr 是对 $SU(N)$的表示矩阵求迹,Sp 是对 Dirac 旋量矩阵求迹,是 γ 与 $q+k$ 的 4 维内积,即

$$(\gamma, q+k) = \gamma^\mu(q_\mu + k_\mu).$$

需要说明的是:

(1) 在 γ^λ, γ^μ, γ^ν 处都加 γ_5 和在其中一处加 γ_5 的结果是一样的;

(2) 由于主要要考察发散行为,与无穷远的行为相联系,费米子的质量都可看作是零,因此在讨论 Feynman 振幅时,费米子的质量就直接取作零.

现在来分析,在什么条件下,各费米子对三角反常图的贡献相消为零.首先注意到 L_i 是 $SU(N)$表示空间中的矩阵,与 Lorentz 旋量空间是正交的,因此在求 TrSp 时,可以分别独立进行$SU(N)$表示空间和Lorentz 旋量空间的求迹. 即使 L_i 是螺旋性表象,其中含 γ_5,也可以把 γ_5 分出去参加 Lorentz 旋量空间的求迹.这样上式中的求迹,实际上可化为

$$\mathrm{TrSp}(L_kL_iL_j\gamma_5\gamma^\lambda\cdots)$$

其中 Tr 只对 $L_kL_iL_j$ 作用,而 Sp 则作用在各 γ 矩阵上. 在考虑三角图时,还必须同时考虑费米子反向进行的图,两个图应当加起来,即要考察的三角图的贡献在群结构上反映为

$$\mathrm{Tr}[(L_iL_j+L_jL_i)L_k] = A_{ijk},$$

A_{ijk} 称为反常系数,它对指标 i,j,k 是完全对称的.

现在来看 A_{ijk} 的含意．如果费米子是左旋的，在求迹时会遇到 γ_5，即有反常．如果费米子是右旋的，在求迹时会遇到 $-\gamma_5$，即有反常但与左旋费米子的贡献差一个负号．右旋费米子对反常的贡献与同样表示的左旋费米子对反常的贡献相反（即差一个负号）是一个普遍规则．因此只要对左旋费米子对反常的贡献讨论清楚就行了．

从上面的讨论自然推论得：如果左旋费米子与右旋费米子构成相同的表示，则它对反常的贡献相消为零．

对于基本表示，反常系数为

$$A_{ijk}=\frac{1}{2}d_{ijk},$$

然而在其它表示中，A_{ijk} 的表达式就不一样了．可以证明对其它表示，A_{ijk} 是基本表示的某一个倍数，即

$$A_{ijk}=A(D)\frac{1}{2}d_{ijk},$$

其中 $A(D)$ 是一个与 i,j,k 指标无关而只决定于表示的常数．通常又称 $A(D)$ 为反常系数，因它与指标 i,j,k 无关而更直接地反映反常的特征．

在一个基本理论中，消除反常的要求可以归结为：如果基本理论在给定的一个群变换下不变，费米子填进这个群的一些表示，算出所有费米子的反常系数，加起来的总和应为零．因此问题归结为给定一个左旋费米子的表示，如何算出它的反常系数．

3．反常系数和群结构

对于任一群 G，反常系数随表示不同而不同．因此首先要考察的是单纯群的不可约表示．对于任一表示 D，其生成元的矩阵表示为 L_i，则其共轭表示 D^* 的生成元矩阵为 $-L_i^*$．相应的反常系数为

$$A_{ijk}(D^*) = -\mathrm{Tr}[(L_i^* L_j^* + L_j^* L_i^*) L_k^*]$$
$$= -A_{ijk}(D),$$

这表明对反常系数 $A(D)$，也有

$$A(D^*) = -A(D)。$$

由此得到推论：

(1) 对于自共轭表示，$D^* = D$，反常系数为零，即 $A(D) = 0$；

(2) 对于实表示，$D = CD^*C^{-1}$，反常系数为零，即 $A(D) = 0$.

由此可见，反常系数不为零的表示必为复表示. 在单纯李代数中有复表示的为

$$SU(N), (N \geqslant 3), SO(4N+2), E_6,$$

因此需要考虑反常系数的仅是这些单纯李代数.

是否只有实表示反常系数才为零，答案是否定的，复表示的反常系数也可以为零. 实表示是反常系数为零的充分条件，但不是必要条件. 通常称反常系数为零的表示为安全表示，所有表示都是安全表示的群称为安全群.

没有复表示的群显然是安全群. 在上述有复表示的群中 $SO(4N+2)$，$(N \geqslant 2)$ 和 E_6 也是安全群. 因此，在所有单纯李群中，只有 $SU(N)$，$(N \geqslant 3)$ 有不安全表示（包括与 $SU(4)$ 同构的 $SO(6)$ 在内. 亦即关于反常系数的计算只需考虑 $SU(N)$ 群.

对于可约表示 $D = D_1 \oplus D_2$，则反常系数为

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2),$$

因此由 D 和 D^* 组成的可约表示 $D + D^*$ 是安全表示.

如果表示 D 是表示 D_1 和 D_2 的直乘，则

$$A(D) = \mathrm{dim}D_1 A(D_2) + \mathrm{dim}D_2 A(D_1),$$

其中 $\mathrm{dim}D_1$ 为表示 D_1 的维数，$\mathrm{dim}D_2$ 为表示 D_2 的维数.

利用这些公式可以简化反常系数的讨论.

4. $SU(N)$ 群反对称张量的反常系数

在大统一理论中，基于物理考虑，实际上费米子总是填入几个指标完全反对称的张量表示，即杨图为一列的表示．我们用 $A(n, m)$ 代表 $SU(n)$ 中有 n 个反对称张量指标的表示的反常系数．

考虑到 $SU(n)\supset SU(n-1)\otimes U(1)$，即 $SU(n)$ 群任一不可约表示 D 中的各分量都可以按它的子群 $SU(n-1)\times U(1)$ 来标记．注意到反常系数 $A(n,m)$ 与生成元的指标 i,j,k 无关，即可以任取适当的 i,j,k 来进行计算．我们取 i,j,k 既在 $SU(n)$ 中又在 $SU(n-1)$ 中，因此计算反常系数时，通过 $SU(n)$ 计算和通过 $SU(n-1)$ 计算是一样的．

对于 $SU(n)$ 群，反常系数为 $A(n,m)$．对于 $SU(n-1)$ 群，就应区分两种情形：m 个指标都在 $SU(n-1)$ 所作用的 $n-1$ 维空间上，这时反常系数为 $A(n-1, m)$；m 个指标中有一个不在 $SU(n-1)$ 所作用的 $n-1$ 维子空间上，这时反常系数为 $A(n-1, m-1)$．因此我们得到递推公式

$$A(n,m)=A(n-1,m)+A(n-1,m-1),$$

重复使用这个公式 k 次，得

$$A(n,m)=\sum_{i=0}^{k}A(n-k,m-i)\binom{k}{i}.$$

令 $n-k=3$，即将 $A(n,m)$ 的计算归结为通过 $SU(3)$ 群的反常系数表出．由于

$$A(3,0)=0,\quad A(3,1)=1, A(3,2)=-1, A(3,3)=0,$$

得到

$$A(n,m)=\binom{n-3}{m-1}-\binom{n-3}{m-2}$$

$$=\frac{(n-3)!(n-2m)}{(m-1)!(n-m-1)!},$$

这就是常用的反常系数公式．从这式明显看出

(1) 当 $n>2m$ 时，$A(n,m)>0$；

(2) 当 $n=2m$ 时，$A(n,m)=0$；

(3) $A(n,n-m)=-A(n,m)$.

值得注意的是，上面的递推公式将 $A(n,m)$ 改为 $\dim(n,m)$ 代表 $SU(n)$ 群 m 阶反对称张量表示的维数，则公式仍成立，即

$$\dim(n,m)=\dim(n-1,m)+\dim(n-1,m-1)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\dim(n-k,\ m-i)\binom{k}{i},$$

令 $n-k=2$ 代入可导出熟知的维数公式

$$\dim(n,m)=\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

将上述关于 $A(n,m)$ 公式给出的数值列在表 9.1.

表 9.1 $A(n,m)$ 公式给出的数值

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	1	−1											
4	1	0	−1										
5	1	1	−1	−1									
6	1	2	0	−2	−1								
7	1	3	2	−2	−3	−1							
8	1	4	5	0	−5	−4	−1						
9	1	5	9	5	−5	−9	−5	−1					
10	1	6	14	14	0	−14	−14	−6	−1				
11	1	7	20	28	14	−14	−28	−20	−7	−1			
12	1	8	27	48	42	0	−42	−48	−27	−8	−1		
13	1	9	35	75	90	42	−42	−90	−75	−35	−9	−1	
14	1	10	44	110	165	132	0	−132	−165	−110	−44	−10	−1

从这张表来看，如果建立一个 $SU(n)$ 群的统一理论，则其中费米子填充的表示受到很强的限制．如果我们一律排左旋粒子，右旋粒子通过反粒子的左旋来排入表示，则在一个理论中，费米子一般应

填两个以上的表示以保证消除反常．当然，也可把费米子填入 $n=2m$ 的实表示，但这样在物理上会带来一些其它复杂性．如果将费米子填入两个互为共轭的表示，显然反常一定消除，因为这两个表示合起来构成一个可约实表示，实际上遇到的问题仍将和上面的情形类似．人们更感兴趣的是左旋费米子填两个以上不可约表示，并且其中每一个或合在一起都不构成实表示的情形．

如果以 $D(n,m)$ 代表 $SU(n)$ 群的 m 阶反对称张量表示，则按照上述要求，可得如下的消除反常的组合：

$SU(5)$：$D(5,1)+D(5,3)$，

$SU(6)$：$D(6,1)+D(6,1)+D(6,4)$，

$SU(7)$：$D(7,1)+D(7,3)+D(7,5)$，

$D(7,1)+D(7,1)+D(7,4)$，

$D(7,1)+D(7,1)+D(7,1)+D(7,5)$，

$D(7,2)+D(7,2)+D(7,4)+D(7,4)+D(7,4)$，

$SU(8)$：$D(8,1)+D(8,2)+D(8,5)$，

$4\times D(8,1)+D(8,6)$，

$5\times D(8,1)+D(8,5)$，

$5\times D(8,2)+4\times D(8,5)$．

在上面所给出的排法取共轭后仍是允许的排法．如果再加上一个要求：费米子表示不重复，则在 $SU(7)$ 和 $SU(8)$ 都只有一种排法了．而 $SU(6)$ 则根本没有符合要求的填法．

5．$SU(n_1)\times SU(n_2)$ 和 $SU(n)\times U(1)$ 中的反常系数

如果理论中涉及的是直乘群 $SU(n_1)\times SU(n_2)$，则实际上只需要分别考虑两个群的反常系数，因为如果三角图的三个顶点连接的规范场粒子分属于两个群，由于两个群是直乘关系，在求生成元表示矩阵的阵迹时应分别求后再相乘．这样，其中必有一个群的生成元表示矩阵为单独一个矩阵求迹，即 $\mathrm{Tr}(L_i)=0$ 保证其反常

系数为零. 因此只需分别考虑两个群的反常系数，即 3 个顶点连接的规范场属同一群的情形.

如果费米子表示为

$$D = D_1 \otimes D_2,$$

其中 D_1 为 $SU(n_1)$ 的表示，D_2 为 $SU(n_2)$ 的表示，则对应两个直乘子群 $SU(n_1)$ 和 $SU(n_2)$ 表示 D 有两个独立的反常系数 A_1 和 A_2，分别为

$$A_1(D) = \dim(D_2) \cdot A(D_1),$$

$$A_2(D) = \dim(D_1) \cdot A(D_2).$$

对于一个 $SU(n_1) \times SU(n_2)$ 群为基础的理论，所谓反常消除是指这两反常系数分别抵消为零，如果仅仅 A_1 和 A_2 抵消为零并不是消除了反常.

如果理论中涉及的是 $SU(n) \times U(1)$ 群时，情况复杂些. 在 $SU(n_1) \times SU(n_2)$ 的情形中，3 条规范粒子外线必属同一个 SU 群. 但现在，3 条规范粒子外线可以同属 $SU(n)$ 群，也可同属 $U(1)$ 群，还可以 2 条属 $SU(n)$，而另一条为 $U(1)$ 规范粒子线. 这种交叉项的出现是由于 $U(1)$ 的生成元的阵迹不为零. 因此在 $SU(n) \times U(1)$ 群为基础的理论中讨论反常消除时，必须同时考虑这三种类型的反常系数分别相消为零，而这三种类型的反常系数则互相不能抵消.

在 Glashow-Weinberg-Salam 模型中，需要考察的反常项有以下几种：

(1) 3 个规范粒子外线都属于 $SU(2)$ 规范群，由于 $SU(2)$ 是安全群，其反常系数抵消为零.

(2) 两个规范粒子外线属于 $SU(2)$ 规范群，另一个规范粒子外线属于 $U(1)$ 规范群. 这时对于左旋费米子线，由于

$$\mathrm{Tr}(I_i I_j + I_j I_i) = \delta_{ij},$$

反常系数抵消为零的条件是要求对于所有左旋费米子

$$\sum_i Y_i = 0.$$

考虑到弱超荷 Y 又可表为

$$Y = 2(Q - I_3).$$

而各费米子 I_3 之和为零，上式又可改写为

$$\sum_i Q_i = 0,$$

即反常系数相消的要求是费米子的总电荷为零. 对于右旋费米子线，由于它们不与 $SU(2)$ 群规范玻色子耦合，反常系数自动为零.

(3) 一个规范玻色子外线属于 $SU(2)$ 规范群，两个规范玻色子属于 $U(1)$ 规范群. 这时由于对 $SU(2)$ 的任何表示都有

$$\mathrm{Tr}(I_i) = 0,$$

反常系数自动为零.

(4) 3 个玻色子外线都属于 $U(1)$ 规范群. 这时反常系数相消的条件要求

$$2\sum_L Y_L^3 - \sum_R Y_R^3 = 0,$$

其中左旋部分前面的系数 2 是因为左旋费米子都属于 $SU(2)$ 规范群的 2 维表示. 通过对称性自发破缺后，使费米子得到质量，这就要求右旋费米子分量和左旋费米子分量的 $U(1)$ 量子数之间关系为

$$Y_R = Y_L \pm 1,$$

上述要求又可改写为

$$\sum_L [2Y_L^3 - (Y_L + 1)^3 - (Y_L - 1)^3] = 0.$$

把这个式子化简又得到

$$\sum_L Y_L = 0,$$

这和前面给出的条件相同．在上面的推导中，利用了费米子获得质量的条件，如果不存在右旋中微子，中微子不获得质量，上述推导也不受影响．因为中微子的 $Y_L = -1$，如果存在右旋中微子，则应有 $Y_R = (-1) + 1 = 0$，这样它的 $Y_R^3 = 0$，在推导上和不存在右旋中微子的情况是完全相同的．

综上所述：$SU(2) \times U(1)$ 电弱统一理论中消除反常的条件是所有费米子的电荷之和为零：

$$\sum_i Q_i = 0.$$

这个条件要求不同电荷的费米子的存在是互相依存的，从而给出费米子代的概念：满足电荷之和为零的一起存在的费米子称为一代．理论上消除反常的要求表现为：自然界存在的费米子是按代出现的．如果实验上发现了一种费米子，则与这费米子同代的其它费米子也应存在，但对这些费米子的质量值并没有直接的限制．

电子中微子 ν_e，电子 e，上夸克 u，下夸克 d 的电荷分别为 0，$-1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$．考虑到夸克属于色 $SU(3)$ 规范群的 3 维表示，电荷要计算三次，因此有

$$\sum_i Q_i = 0 + (-1) + 3\times\left(\frac{2}{3}\right) + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.$$

它们构成一代费米子，通常称为第一代．

类似地 ν_μ, μ, c, s 构成第二代费米子；ν_τ, τ, t, b 构成第 3 代费米子．其中 t 夸克到现在实验上还没有发现，但从理论的要求来看，它的存在应该是确定无疑的．从间接的实验信息显示出 t 夸克的质量 m_t 应为

$$m_t = (125 \pm 30)\mathrm{GeV}.$$

如果实验最后验证出 t 夸克并不存在,则理论必须作重大修改。

还没有发现有第 4 代费米子存在的实验迹象.

§9.4 对称性自发破缺的 Higgs 机理

1. 有质量规范场和对称性自发破缺

定域规范不变性要求存在规范场,规范不变性要求规范场的质量为零. 但是,人们一直在设法推广规范场的概念,试图发展理论,在其中可以允许规范场的质量不为零。举一个最简单的例子,考虑 $U(1)$ 规范场 A_μ,相当于电磁场,其生成元为 1/2. 若有一个场 ψ 带有单位荷,则在定域规范变换

$$\psi \longrightarrow e^{i\beta(x)\frac{1}{2}}\psi,$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{2g}\partial_\mu\beta(x)$$

下拉氏量保持不变. 这个不变性要求拉氏量中不含有 $m^2A_\mu A^\mu$ 项,亦即质量 $m=0$. 但是,如果拉氏量中含有

$$m^2\left(A_\mu - \frac{\partial_\mu\partial^\nu}{\partial^2}A_\nu\right)\left(A^\mu - \frac{\partial^\mu\partial_\nu}{\partial^2}A^\nu\right)$$

项,则仍有规范不变性,因为在规范变换下

$$A_\mu - \frac{\partial_\mu\partial^\nu}{\partial^2}A_\nu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{2g}\partial_\mu\beta(x) - \frac{\partial_\mu\partial^\nu}{\partial^2}\left(A_\nu + \frac{1}{2g}\partial_\nu\beta(x)\right)$$

$$= A_\mu - \frac{\partial_\mu\partial^\nu}{\partial^2}A_\nu,$$

即 $A_\mu - \frac{\partial_\mu\partial^\nu}{\partial^2}A_\nu$ 在规范变换下不变. 由于作具体计算时, 可以选 Lorentz 规范 $\partial^\nu A_\nu = 0$,这样上面给出的这项就还原到通常的质量项, 这一项实际上使规范场获得质量.

这样作法的困难在于不能重整化, 甚至不能量子化, 因为

$\frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\partial^2} A_\nu$项的存在，使运动方程里出现无穷阶微商和积分项，这就使量子化的过程实际上难以进行。

这个例子示意说明了通过这个作法给规范场以质量是可以的，至少在经典场论范围内还是可以的．但是，即使这样的作法也不能推广到非 Abel 场．有人在非 Abel 规范场情形引入真空背景规范，也实现了给规范场以质量，最近有人试探研究其量子化和重整化．这是企图给规范粒子以质量而又不破坏其规范不变性的试探。

另一方面，现在已经成功了的是：通过 Higgs 机理实现的对称性自发破缺，或者等效于 Higgs 机理的动力学对称性自发破缺，给规范场以质量．但是在规范场得到质量的同时，原来的规范对称性也破缺了，不过规范不变性仍然保持．重要的是：量子化和重整化问题在理论上都解决了．弱电统一的 Glashow-Weinberg-Salam 模型以及大统一理论都是建立在这个基础上的。

Higgs 机理的特点是，它可以给规范粒子以质量，但同时伴随着规范对称性的破缺．Higgs 机理以及有关的动力学破缺机理都带有这个特点。

2. Higgs 机理

以一个最简单的例子来说明 Higgs 机理．有一个 $U(1)$ 规范场 A_μ，一个复标量场 ϕ，一个费米场 ψ．拉氏量为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

$$+ (D^\mu \phi^*)(D_\mu \phi) - V(\phi),$$

拉氏量满足的不变性是定域 $U(1)$ 规范不变性．前两项显然是 $U(1)$ 不变的；在 $U(1)$ 变换下，ϕ 的变换规则为

$$\phi \to e^{i\alpha(x)/2} \phi$$

与

$$\phi^* \to e^{-i\alpha(x)/2}\phi^*,$$

$V(\phi)$是 ϕ 场的自作用势,它应为 $U(1)$不变的多项式,即 ϕ^*、ϕ的多项式,可重整性要求 $V(\phi)$是 ϕ 的不超过 4 次的多项式. 这两条要求的限制不难确定 $V(\phi)$的形式,一般地可写作:

$$V(\phi) = -a\phi^*\phi + b(\phi^*\phi)^2,$$

可以不考虑常数项,因为可以通过移动能量原点去掉它.

在力学中,$L=T-V$,T 是动能项,V 是位能项. 在现在的情况下,凡是不含偏微商的项都应属于位能项,这也就是通常习惯上将 $V(\phi)$的前面取作负号的原因. 现在看系统能量最低态是什么,在量子化以前应当相当于经典真空态. 这个态物理上相当于动能和位能都取极小值的解. 动能极小值为零对应场量的一级偏微商为零,亦即场量取常数值. 位能最小的条件则确定场量所取常数值的具体值,要考察的是 ϕ 取什么值时 $V(\phi)$ 取值最小. 令 $x=|\phi|=\sqrt{\phi^*\phi}$,则

$$V(\phi) = -ax^2 + bx^4,$$

由此得到

当 $b<0$ 时,$V(\phi)$极小值落于 $x\to\infty$,

当 $b=0$ 时,$V(\phi)$极小值取决于 a 值,

若 $a>0$,$V(\phi)$极小值落于 $x\to\infty$,

若 $a<0$,$V(\phi)$极小值落于 $x=0$,

当 $b>0$ 时,$V(\phi)$极小值取决于 a 值,

若 $a>0$, $V(\phi)$极小值落于 $x=\sqrt{\frac{a}{2b}}$,

若 $a<0$,$V(\phi)$极小值落于 $x=0$.

在上面各情形中,值得注意的是 $b>0$, $a>0$ 的情形,这时 $V(\phi)$的极小值落于非零的 x 值处,亦即这时物理真空应落于 $|\phi|=$

$\sqrt{\frac{a}{2b}}>0$ 处，如图 9.2 所示．然而由于 ϕ 是复场，在 $|\phi|$ 给定后，

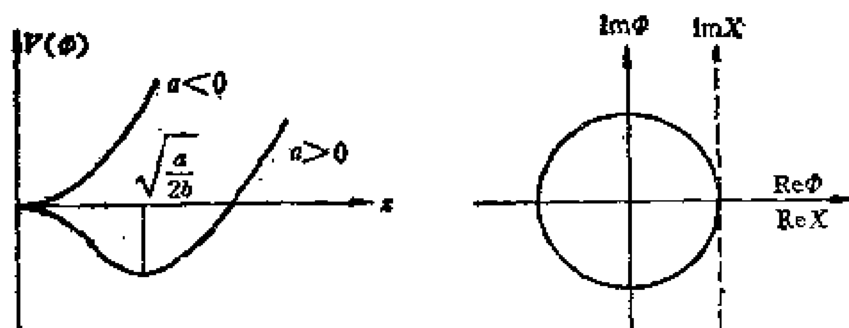


图 9.2 对称性自发破缺自作用势图

其幅角仍能连续任意变化，ϕ 的值是一维简并的．实际的物理真空总只能是满足 $|\phi|=\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 的某一个 ϕ 点，物理上观察到的 ϕ 场也应以这点为基准来标记．上述结果的数学表述为：ϕ 的真空期待值取某一符合

$$|\langle\phi\rangle_0|=\sqrt{\frac{a}{2b}}$$

的值，将 ϕ 在 $\langle\phi\rangle_0$ 附近展开

$$\phi=\langle\phi\rangle_0+\chi,$$

而用 x 场代替 ϕ 场来进行物理讨论．

例如，假定真空落于使

$$\langle\phi\rangle_0=\sqrt{\frac{a}{2b}}$$

处，则 $\phi=\sqrt{\frac{a}{2b}}+\chi$，$\chi$ 仍然是复场，但 $x=0$ 点落于 $\phi=\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 处．从 ϕ 来说，本来 $U(1)$ 对称性是很好满足的，但对于 χ 来说，$U(1)$ 对称性是破缺了的．因为 $U(1)$ 对称性相当于在复平面上绕原点转动的不变性．对 χ 来说，相当于原点平移了 $\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 距离，这就使原来

很好的对称性遭到破缺.

这样,尽管在原始拉氏量中,所有的项都是$U(1)$不变的,原始拉氏量具有的很好的$U(1)$对称性通过这种机理仍然自发破缺了.导致对称性自发破缺的标量粒子ϕ称为Higgs粒子,这种对称性自发破缺的机理称为Higgs机理.

由于ϕ是复场,χ也是复场,即有两个实分量.将ϕ通过χ表示后作规范变换

$$\phi\to e^{i\frac{1}{2}\beta(x)}\phi=\left[\cos\frac{1}{2}\beta(x)+i\sin\beta(x)\right](\chi_R+U+i\chi_I),$$

变换后的虚部为

$$(\chi_R+U)\cos\frac{1}{2}\beta(x)-\chi_I\sin\frac{1}{2}\beta(x),$$

选取定域规范变换群参数$\beta(x)$,可使变换后的虚部为零,这样χ场就表现为一个实场,而不是包括两个实场的复场.

经过规范变换χ场分量少掉了一个,它到哪里去了?答案是,通过这个规范变换,这个分量给了规范场,使规范场多了一个分量.在对称性自发破缺前,规范场没有质量,其螺旋度只有$+1$和-1.在对称性自发破缺后,规范场获得质量,它应具有3个螺旋度的分量,这个分量通过规范变换由Higgs场提供.

一般说来,Higgs机理可以描绘如下:如果定域规范群GT不变的拉氏密度中,Higgs场自作用势的极小值落于Higgs场不为零处,则对称性将自发破缺.对称性自发破缺后,相应地有一些规范场分量将获得质量,这些规范场分量在获得质量的同时由两个螺旋性的态变为3个螺旋性的态,这些新增加的场量是通过规范变换由Higgs场中取得的,相应地Higgs场的分量将减少.

在上面所举的例子中,费米场是有质量的,这是因为所引进的费米子左旋和右旋部分按相同变换规则变换.如果它们的变换规

律不相同，甚至相反，则在对称性破缺前费米子没有质量. 但是如果费米子与标量粒子(即 Higgs 粒子)之间有耦合时，通过 Higgs 机理实现对称性自发破缺

$$\phi=\langle\phi\rangle_0+\chi$$

可以使费米子得到质量. 关于这个问题在一般书和文献上都有具体介绍，这里就从简了.

3. 关于守恒量与不变性的几个基本定理

下面是两个基本定理:

(1) 在对称性自发破缺后，原来的某守恒荷(通常称为守恒量子数) 仍为守恒荷的充要条件是在真空期待值不为零的 Higgs 场分量上该守恒荷为零.

(2) 在对称性自发破缺后，原来对称性 G 群的一个子群 G' 仍保持不变的充要条件是 G' 的所有生成元作用在真空期待值不为零的 Higgs 场分量上都得零.

这两个定理在用 Higgs 机理讨论问题时非常重要. 真空期待值即 Higgs 场中使自作用位势取极小时 ϕ 场应取的值，这点相当于物理真空. 这两个定理给出利用真空期待值不为零的 Higgs 场作为对称性破缺程度和原来的守恒荷是否仍保持守恒的判据.

例如，G-W-S 模型，原来的对称性是 $SU(2)\times U(1)$，对称性破缺是通过一个 $SU(2)$的 2 维表示，$U(1)$量子数 $Y=1$ 的 Higgs 场实现，真空期待值为

$$\langle\phi\rangle_0=v\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

其中 $v=\sqrt{\dfrac{a}{2b}}$，为由Higgs场自作用势 $V(\phi)$所确定的常数. $SU(2)\times U(1)$的守恒荷一共有 4 个，对于 $SU(2)$的 2 维表示可以表为矩阵形式:

$$I_1=\frac{1}{2}\tau_1,\quad I_2=\frac{1}{2}\tau_2,\quad I_3=\frac{1}{2}\tau_3,$$

$$\frac{1}{2}Y\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

对于现在的 Higgs 场 $Y=1$. 这 4 个矩阵作用到 $\langle\phi\rangle_0$ 上都得零，但它们的一个线性组合

$$Q=I_3+\frac{1}{2}Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

乘到 $\langle\phi\rangle_0$ 上为零. 根据上面两个定理就可以得知: Higgs 机理使 $SU(2)\times U(1)$ 对称性破缺，原来的 $SU(2)$ 对称性和 $U(1)$ 对称性都不再保持，原来的 4 个守恒荷分别都不再守恒，但是它们重新组合得到的 Q 仍守恒，以 Q 为生成元的一个 $U(1)$ 群对称性仍然保持. 这个 $U(1)$ 群是原 $SU(2)\times U(1)$ 群的一个 $U(1)$ 子群. 实际上 Q 就是电荷，残存的 $U(1)$ 对称性就是电磁相互作用的 $U(1)$ 对称性，这就表现为电荷在对称性自发破缺后仍然守恒，电磁相互作用的 $U(1)$ 定域规范不变性仍然很好地保持.

这两个定理的物理含意很清楚. 在对称性自发破缺前，所有的生成元都是守恒荷. 在对称性自发破缺时，如果某一守恒荷在 Higgs 场真空期待值不为零的分量上取值不为零，则它就可以通过这个分量湮没于真空或由真空中产生. 这样，这个生成元就不再是守恒荷了；反之，如果某一守恒荷在 Higgs 场真空期待值不为零的分量上取值为零，则它就不能通过这个分量湮没于真空或由真空中产生，亦即它仍然保持是守恒量. 后一个定理是前一个定理的推广，如果某一子群的生成元在 Higgs 场真空期待值不为零的分量上取值都为零，实际上反映了在这个子群中的任何变换下 Higgs 场真空期待值不为零的分量都不会有任何变化，这也就反映了这子群的对称性仍然保持.

再看 $SU(5)$ 群的例，基本表示中生成元写成 5×5 矩阵。如果 Higgs 场是 $SU(5)$ 的正规表示，它也可表为无迹 5×5 矩阵，假定其真空期待值为

$$\langle\phi\rangle_0=v\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix},$$

生成元 I_i 对正规表示的作用可以通过基本表示的矩阵 L_i 表来表述。例如 I_i 对 $\langle\phi\rangle_0$ 的作用为

$$L_i\langle\phi\rangle_0-\langle\phi\rangle_0L_i$$

由于 $\langle\phi\rangle_0$ 在前 3 维中和后 2 维中分别为单位矩阵，因此它与前 3 维中的 $SU(3)$ 子群和后 2 维中的 $SU(2)$ 子群的生成元可以对易，即代入上式为零。此外由于 $\langle\phi\rangle_0$ 是对角矩阵，$SU(5)$ 的对角生成元也与 $\langle\phi\rangle_0$ 对易，这样的生成元共 4 个，其中 3 个包括在 $SU(3)$ 和 $SU(2)$ 的生成元中，另一个为一个 $U(1)$ 生成元。根据上面的定理，$SU(5)$ 破缺后保留的对称性为

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1).$$

§9.5 Higgs 区

1. 两个基本问题

在一个统一理论中，实现对称性自发破缺主要是通过 Higgs 自作用势 $V(\phi)$。这就遇到了选用什么 Higgs 粒子，通过怎样的 $V(\phi)$ 实现什么样的对称性自发破缺，实现的过程会遇到什么问题，能解决什么问题等一系列需要讨论的问题。与 Higgs 场的选取和自作用势的讨论有关的问题通常称为 Higgs 区，这部分工作

往往在一个统一理论的建立中占相当分量的工作量，而对于一个理论的得以建立又是重要的不可缺少的部分.

Higgs 区主要要解决两个问题：

(1) 找到 Higgs 场自作用势$V(\phi)$，它能实现所需要的破缺；

(2) 破缺时不产生赝 Goldstone 粒子.

实际工作中，第一个问题常常是先确定了所需要实现的破缺方案，例如 $SU(5)\to SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. 然后考察选取什么表示的 Higgs 粒子，并且通过怎样的真空期待值就可以实现所需要的破缺，例如 $SU(5)$ 中选 Higgs 粒子为正规表示，就可以通过前面所写的真空期待值，实现所需要的破缺. 接着要作的是找 Higgs 场自作用势 $V(\phi)$，即写出满足对称性要求的 Higgs 场的不超过 4 次的多项式的最普遍形式，求其极小值，按照使极小值落于所需要的破缺处来确定多项式中各项的系数，这是关键的一步. 也有可能得到的结果是无解，就需要从头改变 Higgs 粒子再作，直到得出解为止. 第二个问题是，假如已经找到了一个破缺方案，但是还可能有些 Higgs 粒子得到了质量，而有些 Higgs 粒子则仍然没有得到质量. 对称性破缺后仍保持零质量的 Higgs 粒子称为赝 Goldstone 粒子，考虑了辐射修正以后赝 Goldstone 粒子可以获得少许质量. 现在实验上显然没有看到零质量的标量粒子，所以一个理论中如果出现赝 Goldstone 粒子，则对理论是严重的困难. 有人希望，在理论中出来少量赝Goldstone 粒子，通过辐射修正而得到的质量对破缺能标而言虽然是小量，但如果破缺能标较大，赝Goldstone 粒子通过辐射修正得到质量后也还可以不和现有实验矛盾. 然而，一些理论之所以最终没有成功，常常是由于这个问题没有解决好.

2. 赝Goldstone 粒子的产生判据

现在来分析什么情况下会出现赝 Goldstone 粒子以及出现多

少个质 Goldstone 粒子.

设破缺前的对称性是群 G 所描写的定域规范变换对称性，则相应地，一定还有一个群 G 所描写的整体规范变换对称性. 此外，还可能有附加对称性，这附加对称性一般是非定域的.

在对称性自发破缺时，定域规范群和与之相伴随的整体规范群是"同步"地破缺的，并且其破缺程度也相同. 但是附加对称性和定域规范对称性并不一一对应，因此，当定域规范对称性破缺时，附加对称性虽然也会破缺，但破缺的程度也不能简单地和定域规范对称性的破缺对应起来.

附加对称性并不是在给定了定域规范对称性后自然就导出来的，它往往是在拉氏量写出来之后，自然包含了的. 附加对称性可能是分立的，也可能是连续的，而且并不一定是定域规范对称性以及相伴随的整体规范对称性所直接决定的. 附加对称性的分析有时是很重要的，在对称性自发破缺时，附加对称性是否破缺和如何破缺对质 Goldstone 粒子的出现有相当的影响.

对称性自发破缺后，保留下来的对称性称为剩余对称性. 附加对称性在破缺后也会有剩余对称性，对这个剩余对称性的判断规则仍是上面介绍的两条定理.

按照 Goldstone 定理，对称性自发破缺后，就伴随着出现零质量的标量粒子. 这里所说的对称性，可以是定域规范对称性，也可以是整体对称性. 这样产生的零质量粒子称为 Goldstone 粒子，它们是物理上所不需要的. 定域规范对称性破缺时，一方面出现了 Goldstone 粒子，另一方面规范场获得质量. 规范场从无质量变到有质量，每个场量的螺旋度分量由 2 个增加到 3 个，这增加的分量就通过定域规范变换由 Goldstone 粒子来补偿. 这样，就使实际存在的无质量标量粒子远少于 Goldstone 定理所规定的. 这就是定域规范对称性破缺时有利之处.

现在问题归结为，伴随对称性破缺而产生的零质量标量粒子是否都能被获得质量的规范场所"吃"掉．如果不能全部"吃"掉，剩下的零质量标量粒子，即赝 Goldstone 粒子有多少．

设原来在对称性自发破缺前定域规范群 G 有 m 个生成元，破缺后仍保存的定域规范群 G' 有 m' 个生成元，则得到质量的规范场数目为 $m-m'$．例如 $SU(5)\to SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的破缺过程中，$m=24$，$m'=12$，因此 $m-m'=12$．$m-m'$ 也就是可以被吃掉的零质量标量粒子的数目．

对称性自发破缺时出现多少个无质量的标量粒子，这取决于自作用势 $V(\phi)$ 的性质．从 $V(\phi)$ 求出达极小值的条件，就可以考察在满足极小值条件下，Higgs 场的分量构成的空间的维数 d，即极小值的简并度．例如，在 $U(1)$ 定域规范对称性的例子中得到复 Higgs 场 ϕ 使 $V(\phi)$ 达极小值的条件是

$$|\phi|^2=\phi_R^2+\phi_I^2=\frac{a}{2b},$$

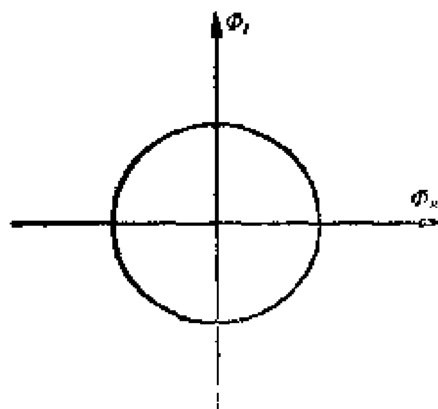


图 9.3　极值条件的简并

这相当于 ϕ 的复平面上的一个圆，如图 9.3 所示．因此在破缺时将出现一个零质量标量粒子，但由于这时 $U(1)$ 规范场要得到质量，所以这无质量标量粒子刚好被"吃"掉．

根据上述讨论，得到如下判据：

$m-m'=d$ 时，实现了 $G\to G'$ 的破缺，并且不出现赝 Goldstone 粒子；

$m-m'<d$ 时，实现了 $G\to G'$ 的破缺，但同时还出现 $d-(m-m')$ 个赝 Goldstone 粒子；

$m-m'>d$ 时，实际上并没实现 $G\to G'$ 的破缺，而是实现了

$G \to G''$ 的破缺，G'' 的生成元数目 $m'' > m'$. 这种情况虽不会出现赝 Goldstone 粒子，但却会表现为按 $G \to G'$ 破缺方案来说应该通过破缺获得质量的某些规范场分量实际上并没有获得质量.

由上所述，对于一个对称性自发破缺的理论，Higgs 自作用势既能实现所需要的破缺又不产生赝 Goldstone 粒子的判据是

$$m - m' = d$$

是否成立.

3. 自作用势的附加对称性

在上面给出的判据中，自作用势取极小值的条件直接决定 d 的数值，它与拉氏量的其它项无关，直接仅由 $V(\phi)$ 的对称性所决定. 自作用势 $V(\phi)$ 的对称性有可能和整个拉氏量的对称性并不一致，有可能有些附加对称性，对整个拉氏量并不成立，但对于自作用势 $V(\phi)$ 还是成立的. 在这种情况下，如果对称性自发破缺后，这些附加对称性还未被充分破缺掉，即表现为极小值条件的简并度维数较大，这样就会导致赝Goldstone 粒子的出现.

为了避免这种情况的出现，应尽可能减少自用作势的附加对称性. 由于决定 d 的是连续对称性的维数，因此主要是要尽可能减少自作用势的附加连续对称性.

额外的附加对称性在 $V(\phi)$ 中出现的一个重要来源是同时引入多个 Higgs 多重态时，如果各个不同的 Higgs 多重态之间没有耦合，则对整个拉氏量存在的整体 G 对称性，对自作用势就可能变为对每一个 Higgs 多重态分别定义的几个整体 G 对称性的直乘.

例如在 G-W-S 弱电统一理论中，如果同时引入 k 个 Higgs 二重态 $\phi_i, i=1,\cdots,k$，并且在自作用势中不引入它们之间的耦合项，即引入

$$V(\phi)=-\sum_{i=1}^{k}a_i\phi_i^+\phi_i+\sum_{i=1}^{k}b_i(\phi_i^+\phi_i)^2,$$

则虽然对整个拉氏量只有 $SU(2)\times U(1)$ 的定域规范对称性和与之伴随的 $SU(2)\times U(1)$ 整体规范对称性，但对于自作用势 $V(\phi)$，则存在有 k 个整体 $SU(2)\times U(1)$ 对称性，它们定义为：

第 i 个 $SU(2)\times U(1)$ 对称性为只有 ϕ_i 变，其它的 ϕ 都不变，i 的取值为 $1,\cdots,k$.

这样，当对称性自发破缺时，这个模型要求的 $m-m'=3$，$d=3k$，因此将出现 $3(k-1)$ 个赝 Goldstone 粒子．为了避免出现这情况，可以在自作用势中引入耦合项

$$\sum_{i=2}^{k}C_i(\phi_i^+\phi_1+\phi_1^+\phi_i),C_i\neq 0,$$

则这 k 个整体对称性又减少到 1 个，不再出现赝 Goldstone 粒子．

由此可见，在 Higgs 区的讨论中，要特别考察自作用势 $V(\phi)$ 是否有多于整个拉氏量对称性的附加连续对称性．在引入多个 Higgs 多重态的情形，应当在自作用势 $V(\phi)$ 中尽可能多地引入各种可能的耦合项，以减少附加对称性，从而避免赝 Goldstone粒子的出现．

§9.6 $SU(2)\times U(1)$ 电弱统一理论中的 Higgs 区

$SU(2)\times U(1)$ 电弱统一理论中粒子的 $SU(2)$ 变换性质可以用该粒子所属表示的量子数 I 来标志，粒子的 $U(1)$ 变换性质可以用该粒子所属表示的量子数 Y 来标志．因此一般来说，可以用 (I, Y) 来标记粒子的 $SU(2)\times U(1)$ 变换性质，同时为了明确，常把这个 $SU(2)$ 群写作 $SU(2)_L$，以表示这个 $SU(2)$ 群只对左旋粒子变

换，亦即这个 $SU(2)$ 群是一个左旋的手征变换群．类似地 $U(1)$ 群写作 $U(1)_Y$，以表示这个 $U(1)$ 群的生成元量子数是弱超荷．最小 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 电弱统一理论中的对称性自发破缺是通过引入 $(I,Y)=\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ 的 Higgs 粒子来实现的 这样确能实现 $SU(2)_L\times U(1)_Y\to U(1)_{em}$ 的破缺，破缺时 4 个 Higgs 粒子中的 3 个作为 Goldstone 粒子被 3 个规范粒子"吃掉"，成为这 3 个规范粒子的纵向分量而使它们获得质量，并不出现赝 Goldstone 粒子．

一个重要的理论问题是：如果 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 电弱统一理论中的 Higgs 区中包含两个 Higgs 多重态，这两个 Higgs 多重态应怎样选取．为了保证破缺后三个规范玻色子和除中微子外的其它费米子都获得质量，其中一个 Higgs 多重态应是 $(I,Y)=\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的二重态．在理论中不出现赝 Goldstone 粒子的要求对另一个 Higgs 多重态的选取给了很强的限制．

令 H 为 $(I,Y)=\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的 Higgs 二重态，Φ 为某 (I,Y) 的 Higgs 多重态，这两个 Higgs 多重态 H 和 Φ 的自作用势可写作

$$V=V_H+V_\Phi+V_{H\Phi},$$

其中

$$V_H=-\mu_H^2[\bar{H}H]_0+\lambda_H[\bar{H}H]_0[\bar{H}H]_0,$$

$$V_\Phi=-\mu_\Phi^2[\bar{\Phi}\Phi]_0+U_\Phi,$$

$$U_\Phi=\sum_{k=0}^{l-\frac{1}{2}}\lambda_k[[\bar{\Phi}\Phi]_{2k+1}[\bar{\Phi}\Phi]_{2k+1}]_0,\ l=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\cdots,$$

$$U_\Phi=\sum_{k=0}^{l}\lambda_k[[\bar{\Phi}\Phi]_{2k}[\bar{\Phi}\Phi]_{2k}]_0,\ l=1,2,\cdots.$$

式中方括弧外的下标表示括弧内场量的总同位旋．对于 Φ 多重态

是$(I,Y)=$(偶,0)的情形，还要增加一项

$$\kappa[\Phi\Phi\Phi]_0$$

到自作用势中去.

一般说来自作用势中的 V_H+V_Φ 项具有的整体对称群 G 满足

$$G\supseteq SU(2)\times U(1)\times SU(2)\times U(1)\supset SU(2)\times U(1),$$

因此为了把这对称性减少到 $SU(2)\times U(1)$群，以保证在对称性破缺后不出现赝 Goldstone 粒子，有必要在自作用势中引入耦合项 $V_{H\Phi}$. 自作用势耦合项 $V_{H\Phi}$ 中包括正规项和特别项. 正规项是指由 $\bar{H}H\bar{\Phi}\Phi$ 组成的项，其中每种 Higgs 多重态的量子数都抵消到零. 正规项可以写作

$$[\bar{H}H]_0[\bar{\Phi}\Phi]_0,\qquad Y_\Phi=0$$

$$[\bar{H}H]_0[\bar{\Phi}\Phi]_0,[[\bar{H}H]_1[\bar{\Phi}\Phi]_1]_0,Y_\Phi\neq 0$$

自作用势中引入了正规耦合项还不足以把 Higgs 场自作用势的对称性降低到 $SU(2)\times U(1)$，因此还需要引入特别耦合项. 对于第二个 Higgs 多重态 Φ 的不同选择方案，所需要引入的特别耦合项也不同. 例如，如果 Φ 也是 $(I,Y)=\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的 Higgs 二重态，$V_{H\Phi}$ 中将出现 6 个互相独立的特别耦合项:

$$[\bar{H}\Phi]_0+[\bar{\Phi}H]_0,\tag{1}$$

$$[[H\bar{H}]_1[\Phi\Phi]_1]_0+[[\bar{\Phi}\bar{\Phi}]_1[HH]_1]_0,\tag{2}$$

$$[[\bar{H}\bar{\Phi}]_1[H\Phi]_1]_0,\tag{3}$$

$$[[\bar{H}\bar{\Phi}]_0[H\Phi]_0]_0,\tag{4}$$

$$[[\bar{H}\bar{H}]_1[H\Phi]_1]_0+[[\bar{H}\bar{\Phi}]_1[HH]_1]_0,\tag{5}$$

$$[[\bar{H}\bar{\Phi}]_1[\Phi\Phi]_1]_0+[[\bar{\Phi}\bar{\Phi}]_1[H\Phi]_1]_0,\tag{6}$$

如果要求两个 Higgs 二重态 H 和 Φ 还有交换对称性，最后两项(5)和(6)将约化合并为一项(5)+(6).

将 Φ 的各种可能的选择方案进行分析后给出：只有在某些特

定的情况下，两个 Higgs 多重态 H 和Φ自作用势的对称性可以降低到 $SU(2)\times U(1)$. 这样，在对称性自发破缺后就不会出现赝 Goldstone 粒子. 这些不出现赝 Goldstone 粒子的情形和相应的 Higgs 自作用势中的特别耦合项如下:

$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　上面列出的 6 个独立项;

$(1,0)$　　$[[\bar{H}H]_1\Phi]_0$;

$(1,2)$　　$[[\bar{H}H]_1\Phi]_0+[[\bar{H}H]_1\bar{\Phi}]_0$;

$\left(\frac{3}{2},1\right)$　　$[[H\bar{H}H]_{\frac{3}{2}}\Phi]_0+[[\bar{H}HH]_{\frac{3}{2}}\bar{\Phi}]_0$,

$[\bar{H}[\bar{\Phi}\Phi\Phi]_{\frac{1}{2}}]_0+[H[\bar{\Phi}\bar{\Phi}\Phi]_{\frac{1}{2}}]_0$,

$[[\bar{H}\bar{H}]_1[\Phi\Phi]_1]_0+[[HH]_1[\bar{\Phi}\bar{\Phi}]_1]_0$;

$\left(\frac{3}{2},3\right)$　　$[[\bar{H}\bar{H}\bar{H}]_{\frac{3}{2}}\Phi]_0+[[HHH]_{\frac{3}{2}}\bar{\Phi}]_0$;

$\left(n+\frac{1}{2},1\right)$, $n\geqslant 2$　$[\bar{H}[\bar{\Phi}\Phi\Phi]_{\frac{1}{2}}]_0+[\bar{H}[\bar{\Phi}\bar{\Phi}\Phi]_{\frac{1}{2}}]_0$,

$[[\bar{H}\bar{H}]_1[\Phi\Phi]_1]_0+[[HH]_1[\bar{\Phi}\bar{\Phi}]_1]_0$.

在电弱统一理论中，判断哪些 Higgs 粒子选择方案在对称性自发破缺后不会出现赝 Goldstone 粒子，其关键是证明可以找到一种 Higgs 自作用势，其对称性可以降低到 $SU(2)\times U(1)$. 这样在对称性自发破缺时，Higgs 自作用势的对称性破缺和整个理论其他部分同步，自然保证了在对称性自发破缺时不会出现赝 Goldstone 粒子

§9.7　破缺后的对称性

通常在考虑对称性的自发破缺时，主要考察原有的定域规范对称性 G 经破缺后仍保留的对称性 G'. 然而值得注意的是，除了有这样的对称性外，还有附加的对称性，在破缺过程中它也参加,

并对质 Goldstone 粒子的出现也有影响. 在对称性自发破缺之后,确定有哪些剩余对称性时,对附加对称性应统一考虑.

例如 $SU(5)$ 的大统一模型中,在破缺前的对称性是 $SU(5)$ 定域规范对称性和与之伴随的 $SU(5)$ 整体规范对称性. 在某些 Higgs 多重态的选取方案中,拉氏量实际上还具有 $U(1)$ 整体规范对称性. 在对称性自发破缺时, 这个 $U(1)$ 整体对称性也同时破缺了, 但这个 $U(1)$ 的生成元和 $SU(5)$ 的某些生成元线性组合后在真空期待值不为零的 Higgs 分量上值为零,这表明在对称性自发破缺后,以这些生成元的这个组合为生成元的 $U(1)$ 群对称性仍然保留下来. 由于其生成元的组成成分中有整体规范对称性部分,因此这个 $U(1)$ 对称性是整体对称性的性质,它不对应规范场。这个 $U(1)$ 对称性所决定的守恒荷即 $B-L$. 但是, 如果 $SU(5)$ 的大统一理论中,选取另外的 Higgs 多重态,则可能不再保持这个整体 $U(1)$ 对称性,即 $B-L$ 不再守恒.

从以上例子可以看出,在对称性自发破缺时,原有的附加对称性即使完全被破缺, 也有可能与其它对称性组成新的对称性而保留下来,新对称性的组成成分中, 只要有整体对称性的部分,这新对称性就是整体对称性. 附加对称性往往并不是事先规定的, 而是从拉氏量中导出的,因此容易被忽视,这是需要特别注意的.

参 考 文 献

[1] 戴元本,相互作用的规范理论,科学出版社,1987.

[2] 高崇寿,曾谨言,粒子物理与核物理讲座,高等教育出版社,1990.

[3] Hamermesh, Group Theory and Its Application to Physical Problems, Addison-Wesley Publishing Company, U. S. A, 1962.

[4] 韩其智,孙洪洲,群论,北京大学出版社,1987.

[5] 李政道,场论与粒子物理学,科学出版社,1980.

[6] 马中骐,戴安英,群论及其在物理中的应用,北京理工大学出版社,1988.

[7] Wulfman, C. E., "Dynamical Groups in Atomic and Molecular Physics", Group Theory and Its Applications, Vol. 11, Loebl, Academic Press, New York, 1971.

[8] Wybourne, B. G., Classical Groups for Physicists, John Wiley, New York, 1974. (中译本,典型群及其在物理学上的应用,冯承天等译,科学出版社,1982.)

[9] 北京大学物理系基本粒子理论组,高能物理与核物理 **2** (1978) 1.

[10] Chou Kuangchao and Gao Chongshou, Proceedings of the 1980 Guangzhou Conference on Theoretical Particle Physics (1980) 1292.

[11] 高崇寿,北京大学学报(自然科学),**10**(1964)241. 高崇寿,物理学报,**20**(1964)1198.

[12] Gao Chongshou, Yan Wuguang, Ye Jun, and Zhao Peiying, Proceedings of the Workshop on Colliding Beam Physics(1984)243.

[13] Gao Chong-shou and Gao Yuanning, Proceedings of the Beijing workshop on weak interactions and CP violation(1990)145.
Gao Chong-shou, Collections of Meeting on the Gauge Field and Other Physical Problems(1982)135.

[14] Henley, E. M. and Jacobsohn, B. A., Physical review, **128** (1962) 1394.

索　引

A

B

C

---

* 按汉语拼音字母为序，右端的号码指本书正文的页码。

D

E

F

G

H

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

W

X